Corrigé du devoir à rendre le 19/09/2025

Exercice 1 :

1. $\exists y \in F\ : \forall x \in E,\ y \neq f(x)$
2. $\exists (x,x') \in E^2\ :\ f(x) = f(x')\, et\, x \neq x'$
3. $(\exists y \in F : \forall x \in E,\ y \neq f(x))$ ou $\left(\exists y \in F : \exists (x,x') \in E^2,\ y = f(x) = f(x')\, et\, x \neq x'\right)$
   ce qui est équivalent à
   $(\exists y \in F\ :\ \forall x \in E,\ y \neq f(x))$ ou $\left(\exists (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x')\ et\ x \neq x'\right)$
4. $\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}\ :\ |x - x_0| < \eta\ \ et\ \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Exercice 2 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

   Première méthode : Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a
$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

   Donc
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

   Deuxième méthode :
   Considérons $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1}$ de sorte que $S = F(1)$. La fonction F est dérivable de dérivée $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$.
   Il existe donc une constante C telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C.$$
   Pour déterminer la constante C, on remarque que $F(0) = 0$ donc $\dfrac{1}{n+1} + C = 0$.
   Ainsi, on a $F\ :\ x \mapsto \dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}\cdot$.
   Par conséquent, $S = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\cdot$
2. Montrons que :
$$\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$
   par récurrence sur N.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier N, on pose
$$\mathcal{H}(N)\ :\ \text{"}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.\text{"}$$
   Initialisation : On a :
$$\sum_{k=n}^{0}\binom{k}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \binom{0+1}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
   donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(N)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$.
   On a
$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} + \binom{N+1}{n}$$
   Par hypothèse de récurrence, on en déduit que
$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} + \binom{N+1}{n} = \binom{N+2}{n+1}$$
   La dernière égalité découlant de la formule de Pascal.

   Conclusion : $\forall N \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$

   On a ainsi prouvé que
$$\boxed{\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2,\quad \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.}$$

Deuxième méthode :
Grâce à la formule de Pascal, on a

$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{N}\left(\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}\right)$$

puis, par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n}=\binom{N+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{N+1}{n+1}$$

Exercice 3 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=2$, $u_1=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n.$$

Montrons que
$$\exists (A,B)\in\mathbb{R}^2\ :\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=A+B2^n$$
Pour cela raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u_n=A+B2^n$, pour tout entier n.
On aurait alors $\begin{cases}u_0=2= & A+B\\ u_1=1= & A+2B\end{cases}$ donc $A=3$ et $B=-1$.
On a donc prouvé que s'il existe un couple de réels (A,B) tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=A+B2^n,$$

alors $(A,B)=(3,-1)$.

Synthèse : Montrons par récurrence double que le couple $(A,B)=(3,-1)$ convient.
Pour tout entier n, on pose $\mathcal{H}(n)\ :\ "u_n=3-2^n"$.
— Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies car $u_0=2=3-2^0$ et $u_1=1=3-2^1$
— Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ soient vraies.
On a alors $u_n=3-2^n$ et $u_{n+1}=3-2^{n+1}$ donc
$u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n=3(3-2^{n+1})-2(3-2^n)=3+2^n\times(-6+2)=3-2^{n+2}$.
— Conclusion : pour tout entier n, on a $u_n=3-2^n$.

On a donc prouvé l'existence d'un unique couple $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier n on ait $u_n=A+B2^n$; il s'agit du couple $(A,B)=(3,-1)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$, $u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$.
On a $u_2=4$, $u_3=8$, $u_4=16$ et $u_5=32$.
Montrons par récurrence double que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=2^n$.
Pour tout entier n, on pose $\mathcal{H}(n)\ :\ "u_n=2^n"$.
— Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies car $u_0=1=2^0$ et $u_1=2=2^1$
— Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ soient vraies. On a alors

$$u_n=\frac{u_{n+1}^2}{u_n}=\frac{2^{2(n+1)}}{2^n}=2^{n+2}.$$

— Conclusion : pour tout entier n, on a $u_n=2^n$.

Exercice 4 : Montrons l'équivalence des propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll}P_1\ : & \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\\ P_2\ : & \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ P_3\ : & \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|\leq\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{array}$$

— Supposons P_1 et montrons P_2.
Soit $\varepsilon>0$. Comme la propriété

$$P(h)\ :\ "\exists\eta>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<h"$$

est vraie pour tout $h>0$, elle est en particulier vraie pour $h=\varepsilon/2$ donc la proposition

$$\exists\eta>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

est vraie. Ainsi, on a prouvé que $\boxed{P_1\Rightarrow P_2}$.
— Supposons P_2 et montrons P_3.
Soit $\varepsilon>0$.
Il existe donc $\eta_0>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\eta_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2$.
Si on pose $\eta=\eta_0/2$ alors on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|\leq\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2$$

En effet, si x est un réel tel que $|x-x_0|\leq\eta$ alors $|x-x_0|<\eta_0$ donc $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2$.
En utilisant que $\varepsilon/2<\varepsilon$, on a donc prouvé P_3. Ainsi, l'implication $\boxed{P_2\Rightarrow P_3}$ est vraie.
— Supposons P_3 et montrons P_1.
Soit $\varepsilon>0$. Comme P_3 est vraie, il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|\leq\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

donc on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On a donc prouvé P_1. Ainsi, l'implication $\boxed{P_3 \Rightarrow P_3}$ est vraie.
Les implications $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$ et $P_3 \Rightarrow P_1$ étant vraies, les trois propositions sont équivalentes.

Exercice 5 :
Soient $(x_1, ..., x_n, y_1, .., y_n)$ $2n$ réels tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y_j$$

Montrons la formule d'inversion

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, calculons

$$S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j.$$

On a

$$S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left[\sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} y_i \right] = \sum_{1 \le i \le j \le k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} y_i$$

donc

$$S = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} y_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \underbrace{\left[\sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} \right]}_{(*)}.$$

Déterminons $(*)$, en remarquant que

$$\binom{k}{j} \binom{j}{i} = \frac{k!}{(k-j)!i!(j-i)!(k-i)!} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-j}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} &= \binom{k}{i} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-i}{k-j} \\ &= \binom{k}{i} \sum_{p=0}^{k-i} (-1)^p \binom{k-i}{p} = \binom{k}{i} (1-1)^p \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, $S = y_k$; ce qui prouve que

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons

$$P(k)\ :\ "y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_j"$$

Initialisation : Par définition, $x_1 = \sum_{j=1}^{1}\binom{1}{j}y_j = y_1$ et $\sum_{j=1}^{1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_j = x_1$ donc $y_1 = \sum_{j=1}^{1}(-1)^{1-j}\binom{1}{j}x_j$ et $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$ tel que

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_j$$

Montrons que l'on a $P(p+1)$.
On a

$$x_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+1}\binom{p+1}{j}y_j = \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}y_j + y_{p+1}$$

donc

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}y_j$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}\left(\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}x_k\right)$$

donc

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{1\le k\le j\le p}\binom{p+1}{j}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}x_k$$

puis

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=k}^{p}\binom{p+1}{j}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}x_k$$

soit

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=k}^{p}(-1)^{k-j}\binom{p+1}{j}\binom{j}{k}\right)x_k$$

Comme

$$\binom{p+1}{j}\binom{j}{k} = \frac{(p+1)!}{k!(j-k)!(p+1-j)!} = \binom{p+1-k}{j-k},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
y_{p+1} &= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=k}^{p}(-1)^{k-j}\binom{p+1-k}{j-k}\right)\binom{p+1}{k}x_k\\
&= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{m=0}^{p-k}(-1)^{m}\binom{p+1-k}{m}\right)\binom{p+1}{k}x_k\\
&= x_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k\\
&= \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{p-k}(-1)^m\binom{p+1-k}{m} &= \sum_{m=0}^{p+1-k}(-1)^m\binom{p+1-k}{m} - (-1)^{p+1-k}\binom{p+1-k}{p+1-k}\\
&= (1-1)^{p+1-k} - (-1)^{p+1-k} = -(-1)^{p+1-k}
\end{aligned}$$

car $p+1-k>0$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
y_{p+1} &= x_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k\\
&= \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k
\end{aligned}$$

donc $P(p+1)$ est vraie.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_j}$$