Devoir à rendre le 19/09/2025

Exercice 1 : Soit $f : E \to F$ une application. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. f est surjective : $\forall y \in F,\ \exists x \in E\ :\ y = f(x)$
2. f est injective : $\forall (x, x') \in E^2\ :\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
3. f est bijective : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E\ :\ y = f(x)$
4. f est continue en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exercice 2 :

1. Soit u la suite définie par
   — $u_0 = 2$
   — $u_1 = 1$
   — $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer que
   $$\exists! (A, B) \in \mathbb{R}^2\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + B2^n$$
2. Soit u la suite définie par
   — $u_0 = 1$
   — $u_1 = 2$
   — $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$
   Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5. Conjecturer une expression de u_n et la prouver.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exercice 4 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$
2. Montrer que :
   $$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1,..., x_n, y_1, ...,y_n des réels tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y_j$$

Démontrer la formule d'inversion

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

1. en utilisant les sommes doubles ;
2. par récurrence.