# devoir à rendre le 10/04/2026

**Problème :**
**I. Contexte**
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère une suite $u$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. *Montrer que, pour tout entier $n$, on a :*

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n$, on pose $H(n) =$ " $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ ".

Initialisation : Par définition $A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ donc $H(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vrai.

On a alors $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_n \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

**II. Premier exemple**

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) *Déterminer les réels $\lambda$ tels que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.*
*On pourra remarquer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$ possède 1 comme racine et le factoriser par $X - 1$.*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda(2-\lambda) & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1+2\lambda-\lambda^2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -2+\lambda(1+2\lambda-\lambda^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or,

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

donc $A - \lambda I_3$ est inversible si, et seulement si, $\lambda \notin \{-1, 1, 2\}$.

(b) *En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$.*

Les vecteurs $X_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres $-1$, 1 et 2.

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3$,

la famille $(X_{-1}, X_1, X_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$.

(c) *Prouver que la matrice $A$ est semblable à une matrice diagonale.*

Si l'on considère l'endomorphisme $f$ canoniquement associé à $A$, alors sa matrice dans la base canonique vaut $A$ et sa matrice dans la base $(X_{-1}, X_1, X_2)$ est diagonale. On en déduit que $A$ est semblable à une matrice diagonale.

3. *Prouver qu'il existe trois matrices $R_1$, $R_2$ et $R_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout entier $n$, on ait $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$.*
*On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.*
D'après la question précédente, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc on a pour tout entier $n$, on a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$$

En posant $R_1 = PE_{1,1}P^{-1}$, $R_2 = PE_{2,2}P^{-1}$ et $R_3 = PE_{3,3}P^{-1}$, on a donc, pour tout entier $n$, $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$

4. Soit $u$ une suite vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$
Prouver qu'il existe des constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$
*On ne demande pas d'expliciter les constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.*
On a pour tout entier $n$,
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} + (-1)^n R_2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} + 2^n R_3 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$
En posant $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les troisièmes coordonnées des vecteurs $R_3 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, $R_1 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ et $R_2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, on a donc la résultat.

## III. Second exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) *Déterminer les réels $\lambda$ tels que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 4-\lambda & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -5+\lambda(4-\lambda) & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda(5+\lambda^2-4\lambda) \end{pmatrix}$$
Or, $2 - \lambda(5 + \lambda^2 - 4\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ donc $A - \lambda I_3$ est inversible si, et seulement si, $\lambda \notin \{1, 2\}$.

(b) *En déduire qu'il existe pas de base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$.*
Si une telle base $(X_1, X_2, X_3)$ existait, alors elle serait constituée de vecteurs appartenant à $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou à $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On aurait donc $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, ce qui est absurde pour des raisons de dimension.

6. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
*Montrer que la droite vectorielle $D$ engendrée par le vecteur $U$ est stable par $A$.*
Soit $X \in \mathbb{R}U$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $X = tU$ donc $AX = tAU = 2tU \in \mathbb{R}U$. Donc la droite vectorielle $D$ engendrée par le vecteur $U$ est stable par $A$.

7. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) *Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $V$ et $AV$ est un plan vectoriel. On le notera $P$.*
Les vecteurs $V$ et $AV = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels, ils engendrent donc un plan.

(b) *Prouver que le vecteur $A^2V$ appartient au plan $P$.*
On a $A^2V = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2V + 3AV \in P$.

(c) *En déduire que le plan $P$ est stable par la matrice $A$.*
Soit $X \in P$, il existe deux réels $t$ et $s$ tel que $X = tV + sAV$ donc $AX = tAV + sA^2V = -2sV + (t + 3s)AV \in P$. Donc $P$ est stable par la matrice $A$.

## IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque.

8. Soit $D$ une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par un vecteur $U$ non nul.
*Prouver que la droite $D$ est stable par la matrice $A$ si, et seulement si, $U$ est un vecteur propre de la matrice $A$.*
• Soit $U$ un vecteur propre de $A$ et $\lambda$ la valeur propre associée.
Soit $X \in D$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $X = tU$ donc $AX = tAU = \lambda tU \in \mathbb{R}U$. Donc la droite vectorielle $D$ engendrée par le vecteur $U$ est stable par $A$.
• Réciproquement, supposons que $D$ soit stable par $A$. On a alors $AU \in D$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $AU = tU$. Comme $U$ est non nul, c'est donc un vecteur propre de $A$.
Donc la droite $D$ est stable par la matrice $A$ si, et seulement si, $U$ est un vecteur propre de la matrice $A$.

9. Soit $P$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On considère une base $(X_1, X_2)$ de $P$ et $X_3$ un vecteur non nul normal à $P$.
   (a) *Prouver que le plan $P$ est stable par la matrice $A$ si, et seulement si, les vecteurs $AX_1$ et $AX_2$ appartiennent à $P$.*
   • Supposons le plan $P$ stable par la matrice $A$, alors par définition, les vecteurs $AX_1$ et $AX_2$ appartiennent à $P$.
   • Supposons que les vecteurs $AX_1$ et $AX_2$ appartiennent à $P$. Soit $X \in P$, il existe deux réels $t$ et $s$ tel que $X = tX_1 + sX_2$ donc $AX = tAX_1 + sAX_2 \in P$ car $P$ est stable par combinaison linéaire.
   Donc $P$ est stable par la matrice $A$.
   Ainsi, le plan $P$ est stable par la matrice $A$ si, et seulement si, les vecteurs $AX_1$ et $AX_2$ appartiennent à $P$.
   (b) *Montrer que le vecteur $AX_1$ appartient au plan $P$ si, et seulement si, les vecteurs $X_1$ et ${}^tA\,X_3$ sont orthogonaux.*
   *On utilisera la notation matricielle du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$ donnée en préambule $(X|Y) = {}^tX\,Y$.*
   Le vecteur $AX_1$ appartient au plan $P$ si, et seulement si, il est orthogonal au vecteur $X_3$ donc si, et seulement si, ${}^t(AX_1)\,X_3 = 0$ donc si, et seulement si, ${}^tX_1\,{}^tAX_3 = 0$ donc si, et seulement si, les vecteurs $X_1$ et ${}^tA\,X_3$ sont orthogonaux.
   (c) *En déduire que le plan $P$ est stable par la matrice $A$ si, et seulement si, le vecteur $X_3$ est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.*
   Le plan $P$ est stable si, et seulement si, les vecteurs $AX_1$ et $AX_2$ appartiennent à $P$ si, et seulement si, les vecteurs $X_1$ et $X_2$ sont orthogonaux au vecteur ${}^tA\,X_3$ cad "si, et seulement si, " ${}^tA\,X_3$ est colinéaire au vecteur normal $X_3$ donc si, et seulement si, le vecteur $X_3$ est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.
   Justifions l'équivalence entre guillemets.
   Si ${}^tA\,X_3$ est colinéaire à $X_3$, alors comme $X_3$ est orthogonal à $P$, les vecteurs $X_1$ et $X_2$ sont orthogonaux au vecteur ${}^tA\,X_3$
   Réciproquement, supposons que les vecteurs $X_1$ et $X_2$ soient orthogonaux au vecteur ${}^tA\,X_3$. Comme $X_3 \notin P$, $(X_1, X_2, X_3)$ est une base du plan donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $({}^tA\,X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$ puis ${}^tA\,X_3 | \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 | \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_3 (X_3 | \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$ soit $0 = \|\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\|^2 + 0$ donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$ puis ${}^tA\,X_3$ est colinéaire à $X_3$.

## V. Fin du second exemple

On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. *Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice $A$.*
Comme $\ker(A - I_3) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ker(A - 2I_3) = Vect\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il n'y a que deux droites stables par $A$ : celle engendrée par $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celle engendrée par $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. On admet que les valeurs propres de ${}^tA$ sont 1 et 2.
*Déterminer les équations des plans vectoriels stables par la matrice $A$.*
Les plans stables par $A$ sont les plans d'équation $ax + by + cz = 0$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice ${}^tA$.
Comme $\ker\left({}^tA - I_3\right) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\ker\left({}^tA - 2I_3\right) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il existe exactement deux plans stables par $A$ celui d'équation $x - 3y + 2z = 0$ et celui d'équation $x - 2y + z = 0$.

12. *En déduire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :*
    — *le vecteur $e_1$ soit un vecteur propre de la matrice $A$ associé à la valeur propre 2,*
    — *la droite engendrée par le vecteur $e_2$ soit stable par la matrice $A$,*
    — *le plan $P$ engendré par les vecteurs $e_2$ et $e_3$ soit stable par la matrice $A$.*

Vu les calculs précédents, les vecteurs $e_1$ et $e_2$ ne peuvent qu'être proportionnels à $U_1$ ou $U_2$. Comme $P_1 = Vect(U_1, U_2)$, $e_3 \in P_2$.

On prend $e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $P_2 = Vect(e_2, e_3)$.

La famille $(e_1, e_2, e_3)$ étant de cardinal 3, il n'y a qu'à prouver sa liberté pour conclure.

13. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique.

(a) *Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Elle est égale à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car, par construction, $f(e_1) = 2e_1$, $f(e_2) = e_2$ et, par calculs, $f(e_3) = e_2 + e_3$

(b) *En déduire que la matrice $A$ est semblable à une matrice de la forme*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \delta \in \mathbb{R}.$$

En prenant $\delta = 1$, ces matrices représentent le mêle endomorphismes dans des bases différentes, elles sont donc semblables.

(c) *Déterminer $B^n$ pour tout entier naturel $n$.*

On prouve par récurrence ou en utilisant la formule du binôme de Newton, en précisant que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, que, pour tout entier $n$, on a $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. *En déduire que si une suite $u$ vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n,$$

*alors il existe des constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n.$$

*On ne demande pas d'expliciter les constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.*

Soit $u$ une telle suite. Considérons $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On a pour tout entier $n$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = PB^nP^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On écrit $B^n = Q_1 + 2^nQ_2 + nQ_3$ pour conclure comme à la question 4.