devoir à rendre le 10/04/2026

Problème :

Dans toute la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel AX soit correctement défini.

On considérera le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire est égal à $(X|Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Comme le produit matriciel ${}^tX\,Y$ est égal à la matrice de taille 1×1,

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right),$$

on identifiera matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et réel, en notant $(X|Y) = {}^tX\,Y$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est **stable** par la matrice A si :

$$\forall X \in F, \quad AX \in F.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dit qu'un vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A si X est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$.

On pourra admettre les résultats des parties I et IV et les utiliser dans la partie V

I. Contexte

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. Premier exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Déterminer les réels λ tels que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.
   On pourra remarquer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$ possède 1 comme racine et le factoriser par $X - 1$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   (c) Prouver que la matrice A est semblable à une matrice diagonale.
3. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout entier n, on ait $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$.
   On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.
4. Soit u une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

   Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$

   On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.

III. Second exemple

On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) Déterminer les réels λ tels que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.
   (b) En déduire qu'il existe pas de base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
6. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la droite vectorielle D engendrée par le vecteur U est stable par A.
7. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel. On le notera P.
   (b) Prouver que le vecteur A^2V appartient au plan P.
   (c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A.

IV. Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque.

8. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par un vecteur U non nul.
   Prouver que la droite D est stable par la matrice A si, et seulement si, U est un vecteur propre de la matrice A.
9. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On considère une base (X_1, X_2) de P et X_3 un vecteur non nul normal à P.
   (a) Prouver que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, les vecteurs AX_1 et AX_2 appartiennent à P.
   (b) Montrer que le vecteur AX_1 appartient au plan P si, et seulement si, les vecteurs X_1 et ${}^tA\,X_3$ sont orthogonaux.
   On utilisera la notation matricielle du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$ donnée en préambule $(X|Y) = {}^tX\,Y$.
   (c) En déduire que le plan P est stable par la matrice A si, et seulement si, le vecteur X_3 est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$.

V. Fin du second exemple

On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice A.
11. On admet que les valeurs propres de ${}^tA$ sont 1 et 2.
    Déterminer les équations des plans vectoriels stables par la matrice A.
12. En déduire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
    — le vecteur e_1 soit un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2,
    — la droite engendrée par le vecteur e_2 soit stable par la matrice A,
    — le plan P engendré par les vecteurs e_2 et e_3 soit stable par la matrice A.
13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
    (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
    (b) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme
    $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \delta \in \mathbb{R}.$$
    (c) Déterminer B^n pour tout entier naturel n.
14. En déduire que si une suite u vérifie :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n,$$
    alors il existe des constantes α, β et γ telles que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n.$$
    On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.