# Corrigé du devoir à rendre le 04/05/2026

**Exercice 1 :** Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ tel que $A^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = 2n$.

*Montrer que $A$ est semblable à la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
Analyse (non nécessaire sur la copie) : Supposons qu'il existe une base $\mathbb{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 3n}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Ker} f$ (et même une base par argument de dimension) et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_{i+n}) = e_i$ et $f(e_{i+2n}) = e_{i+n}$
Ainsi, $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Im} f^2$.
Synthèse : Montrons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f^2$. Comme $f^3 = 0$, on a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$ et, grâce au théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker} f = n$.
Considérons l'application linéaire $g; : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im} f^2,\ x \mapsto f(x)$. Le théorème du rang donne alors $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 + \dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) = 2n$.
Comme $\dim(\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f) \leq \dim \mathrm{Ker} f = n$, on en déduit que $\mathrm{rg} f^2 \geq n$ puis $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f^2$.
On considère alors une base de $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f^2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ et l'on dispose de $(e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}) \in E^n$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_{i+2n}) = e_{i+n}$. On pose enfin $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_{i+n} = f(e_{i+2n})$.
Montrons que la famille $\mathbb{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 3n}$ ainsi construite est libre, ce qui prouvera, par argument de dimension, que c'est une base de $\mathbb{K}^{3n}$ et par construction que

$$\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(\lambda)_{1 \leq i \leq 3n} \in \mathbb{K}^{3n}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$. En appliquant $f^2$, on obtient $\lambda_{2n+1} = \cdots = \lambda_{3n} = 0$ par liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$. En revenant et en appliquant $f$, on obtient $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$ par liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$. En revenant, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ par liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$.

**Exercice 2 :**

1. *Déterminer le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

   En enlevant la dernière ligne à toutes les autres, on obtient :

$$D_n = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$D_n = -D_{n-1} + (-1)^{n+1} det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

   donc en développant par rapport à la première colonne $D_n = -D_{n-1} + (-1)^{n+1}$. On obtient alors par récurrence immédiate que $D_n = (-1)^{n+1}(n-1)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les coefficients extra-diagonaux appartiennent à $\{\pm 1\}$.

   *Montrer que si $n$ est pair, alors $A$ est inversible.*

   Le déterminant de $A$ est égal modulo 2 à celui de la matrice précédente donc impair. Il est donc non nul, ce qui prouve que $A$ est inversible.

3. On suppose que l'on dispose de $2n+1$ cailloux tels que si l'on en prend $2n$ quelconques on puisse toujours en faire deux tas de même masse de $n$ cailloux.

   *Que peut-on dire sur les masses des cailloux ?*

   Si l'on note $M = (m_i)_{1 \leq i \leq 2n+1} \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des masses des cailloux, alors il existe une matrice $A$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les coefficients extra-diagonaux appartiennent à $\{\pm 1\}$ telle que $AM = 0$.

D'après ce qui précède, on peut extraire de $A$ une matrice de taille $2n$ inversible donc $A$ est de rang au moins $2n$. De plus, comme il y a sur chaque ligne autant de 1 que de $-1$, la matrice $(1)_{1\leq i\leq 2n+1} \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ engendre le noyau de $A$.

Par conséquent, $M$ lui est colinéaire, ce qui prouve que tous les cailloux sont de même masse.

**Exercice 3 :**

1. Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   *Montrer que $f$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.*
   Si $f$ est une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda I_d$ donc pour tout $x \in E$, on a $(x, f(x)) = (x, \lambda x)$ est liée.

   Supposons que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
   Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme le vecteur $e_i$ est non nul, on dispose de $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. En considérant le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$ qui est non nul, on dispose d'un scalaire $\mu$ tel que $f(x) = \mu x$ puis en utilisant la linéarité de $f$ et la liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \mu$.
   Ainsi, $f = \mu Id$ car ils coïncident sur une base.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
   *Prouver qu'il existe une matrice semblable à $M$ dont la première colonne soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \{0, 1\}$.*
   Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$.
   Si $f$ est une homothétie, alors comme $f$ est de trace nulle, $f = 0$ donc le résultat est évident et $\lambda = 0$.
   Sinon, il existe un vecteur $x_0$ tel que $(x_0, f(x_0))$ est libre. On peut donc la compléter en une base. Par définition, la matrice de $f$ dans cette base a pour première colonne celle attendue avec $\lambda = 1$.
3. *En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.*
   On procède par récurrence sur la taille de la matrice.
   Si elle est de taille $1 \times 1$, alors comme elle est de trace nulle, la matrice est nulle.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour les matrices de taille $n \times n$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}$ de trace nulle. Elle est alors semblable à une matrice de la forme $M' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ \lambda & \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}$ et $A \in \mathcal{M}_n$. Comme la trace de $M$ est nulle, celle de $A$ aussi. Il existe donc, par hypothèse de récurrence, une matrice $B$ à coefficients diagonaux nuls et $P \in GL_n$ telles que $A = PBP^{-1}$.
   On pose alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ qui est une matrice inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Le produit matriciel $Q^{-1}M'Q$ donne alors
   $$Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & LP \\ C & AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & P^{-1}AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & B \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $M'$, puis $M$, est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
4. Soit $D$ une matrice diagonale ayant tous ses coefficients diagonaux distincts.
   *Étudier le noyau et l'image de $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto MD - DM$ et en déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*
   $$\mathrm{Tr}(M) = 0 \iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \,:\, M = AB - BA.$$
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $(MD - DM)_{i,j} = M_{i,j}(D_{j,j} - D_{i,i})$. On en déduit que le noyau de $\Phi$ est l'ensemble des matrices diagonales et que l'image de $\Phi$ est incluse dans l'ensemble des matrices ayant tous leurs coefficients diagonaux nuls.
   Grâce au théorème du rang, on obtient que l'image de $\Phi$ est exactement l'ensemble des matrices ayant tous leurs coefficients diagonaux nuls.
   Soit $M$ une matrice de trace nulle. D'après ce qu'il précède, il existe une matrice $M_0$ ayant tous leurs coefficients diagonaux nuls et une matrice $P$ inversible telles que $M = PM_0P^{-1}$. D'après l'étude de $\Phi$, on dispose de $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $M_0 = AB - BA$. Par suite, $M = PAP^{-1}PBP^{-1} - PBP^{-1}PAP^{-1}$, ce qui prouve la première implication.
   La réciproque découle des propriétés de la trace.