devoir à rendre le 04/05/2026

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ tel que $A^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = 2n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1. Déterminer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les coefficients extra-diagonaux appartiennent à $\{\pm 1\}$.
   Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
3. On suppose que l'on dispose de $2n+1$ cailloux tels que si l'on en prend $2n$ quelconques on puisse toujours en faire deux tas de même masse de n cailloux.
   Que peut-on dire sur les masses des cailloux ?

Exercice 3 :

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   Montrer que f est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
   Prouver qu'il existe une matrice semblable à M dont la première colonne soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \{0, 1\}$.
3. En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
4. Soit D une matrice diagonale ayant tous ses coefficients diagonaux distincts.
   Étudier le noyau et l'image de $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto MD - DM$ et en déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{Tr}(M) = 0 \iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \,:\, M = AB - BA.$$