

Devoir à rendre le 21/05/2026

Autour de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

I Calcul de l'intégrale $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt :$

On considère pour cela la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$

1. Calculez $f(0)$.
2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Prouver que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
5. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{1}{2}e^{|u|}u^2$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 1]$. En déduire que

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \int_0^1 e^{-(1+t^2)x} dt \right| \leq \frac{2h^2}{3} e^{2|1-x|}$$

7. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et donner l'expression de f' sous forme d'intégrale.
8. Prouver que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
9. En déduire l'existence et la valeur de I .
10. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt$.

II Étude de la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^x e^{-t^2/2} dt :$

1. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^x e^{-t^2/2} dt$ est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 1[$. On notera G sa réciproque.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$.
5. Soit $y \in]0, 1[$. Exprimer $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$.
6. Tracer le graphe de F et G .
7. Soit $x < 0$. Montrer que $\forall u \in]-\infty, x]$, on a $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) h'(u) \leq e^{-u^2/2} \leq h'(u)$
où $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
8. En déduire que, pour tout $x < 0$, on a

$$-\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \leq F(x) \leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$$

9. En déduire un équivalent de F en $-\infty$ puis de $1-F$ en $+\infty$.
10. Trouver un équivalent de $\ln F$ en $-\infty$.
11. Donnez un équivalent de G en 0 et en 1.