Corrigé du devoir à rendre le 07/10/2024

Exercice 1 :

1. Il est inutile de recopier l'énoncé mais si on le souhaite, on peut écrire "Résolvons l'équation $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$" mais on n'écrit PAS : "On a $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$" ou "$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ sans phrase"

   Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \sum_{k=0}^{4} (-z)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(-z)^5}{1+z} & \text{si } z \neq -1 \\ 5 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Or, $(-z)^5 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] \,:\, -z = e^{2ik\pi/5} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] \,:\, z = -e^{2ik\pi/5}$.
   Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{-e^{2ik\pi/5},\ k \in [\![1,4]\!]\}}$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \text{ est racine du polynôme } X^2 + X = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \{j, j^2\}\end{aligned}$$

   Or,
$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z-i} = j \Leftrightarrow z(1-j) = -i(1+j) &\Leftrightarrow z = -i\frac{e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}\right)}{e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = -i\frac{\cos(\pi/3)}{-i\sin(\pi/3)} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

   et
$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z-i} = j^2 \Leftrightarrow z\left(1-j^2\right) = -i\left(1+j^2\right) &\Leftrightarrow z = -i\frac{e^{2i\pi/3}\left(e^{-2i\pi/3} + e^{2i\pi/3}\right)}{e^{2i\pi/3}\left(e^{-2i\pi/3} - e^{2i\pi/3}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = -i\frac{\cos(2\pi/3)}{-i\sin(2\pi/3)} \Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$

   On pouvait aussi résoudre directement : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 &\Leftrightarrow (z+i)^2 + (z+i)(z-i) + (z-i)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2iz - 1 + z^2 + 1 + z^2 - 2iz - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3z^2 - 1 = 0\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$

Exercice 2 : Soit $u = e^{2i\pi/5}$.

1. (a) Comme $u \neq 1$, on a $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = \dfrac{1-u^5}{1-u} = 0$. D'après les relations coefficients/racines, α et β sont les deux racines du polynôme $X^2 + X - 1$ si, et seulement si, $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$ Or, on vient de prouver que $1 + \alpha + \beta = 0$ et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \left(u + u^4\right)\left(u^2 + u^3\right) = u^3\left(1 + u^3\right)(1+u) = u^3\left(1 + u + u^3 + u^4\right) \\ &= -u^5 = -1\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont les deux racines du polynôme } X^2 + X - 1.}$

   On aurait aussi pu prouver que α et β étaient racines de $X^2 + X - 1$ **et** que $\alpha \neq \beta$.

   (b) Le discriminant associé au polynôme $X^2 + X - 1$ est $\Delta = 5$ donc les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Or $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
   Comme $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \geq 0$ donc α est la racine positive de $X^2 + X - 1 = 0$ d'où

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

2. On note A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, u, u^2, u^3, u^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   (a) La droite (A_1A_4) a pour équation $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ car $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ donc H a pour coordonnées $\boxed{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0\right)}$.

(b) Comme le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ a pour coordonnées $(1/2, 1)$, $\Omega B = \sqrt{5/4}$. Les abscisses des points M et N sont donc $1/2 \pm \sqrt{5/4}$.

Donc $\boxed{\text{les coordonnées des points } M \text{ et } N \text{ sont } (\alpha, 0) \text{ et } (\beta, 0)}$

Comme $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on en déduit que $\boxed{H \text{ est le milieu de } [OM]}$.

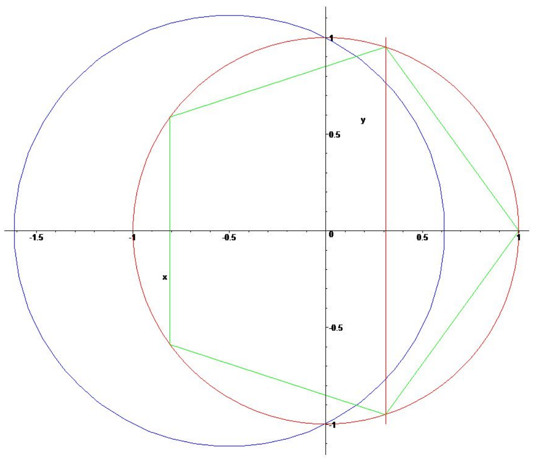
(c) On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O passant par A_0. Soit C son autre intersection avec la droite (OA_0). On construit le milieu Ω du segment $[C, O]$ comme intersection de la droite (OA_0) et de l'intersection de la médiatrice du segment $[C, O]$. Cette dernière s'obtient en joignant les points d'intersection de deux cercles de même rayons et centrés sur C et O.

De même, on obtient B comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et de la médiatrice du segment $[C, A_0]$. On construit alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par B. On considère son intersection M avec la demi-droite $[0, A_0)$.

Les point A_1 et A_4 sont obtenus comme intersection du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la médiatrice du segment $[O, M]$.

Le point A_2 est obtenu comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et du cercle de centre A_1 et de rayon A_0A_1.

Le point A_3 est obtenu comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et du cercle de centre A_4 et de rayon A_0A_1.



Exercice 3 :

On considère l'équation à coefficients complexes : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, et on note $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. (a) Pour tout complexe α, le coefficient de X^2 du polynôme $P(X + \alpha)$ est $3\alpha + a$. Ainsi, le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X) = P(X + \alpha)$ est nul si et seulement si $\boxed{\alpha = -a/3}$.

   (b) Par identification, on a

$$\boxed{p = b - a^2/3} \qquad \text{et} \qquad \boxed{q = 2a^3/27 - ab/3 + c}$$

   On s'est ainsi ramené à résoudre l'équation $(*)$: $z^3 + pz + q = 0$

2. Comme $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$, l'équation devient

$$\boxed{z^3 + pz + q = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0}$$

3. Le couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est l'unique solution à l'ordre près du système

$$\begin{cases} z = u + v \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

   si et seulement si le polynôme $(X - u)(X - v)$ est égal à $X^2 - zX - p/3$.
   Or, pour tout complexe z le polynôme $X^2 - zX - p/3$ admet deux racines complexes ce qui prouve $\boxed{\text{que le système a une unique solution (à l'ordre près)}}$.

4. Si z est solution de $(*)$, alors

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{et} \qquad u^3v^3 = (-p/3)^3 = -p^3/27$$

   Par conséquent, $\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les racines du polynôme } X^2 + qX - p^3/27.}$

5. Réciproquement, si u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + q - p^3/27$ alors $u^3 + v^3 + q = 0$ mais la relation $u^3v^3 = -p^3/27$ n'implique pas forcément $3uv + p = 0$.
   Ainsi, si u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + qX - p^3/27$ **et** si $3uv + p = 0$ alors $z = u + v$ est solution de $(*)$.

   Notons r_1 et r_2 les racines du polynôme $X^2 + qX - p^3/27$; ρ_1 et ρ_2 des racines cubiques de r_1 et r_2 puis $\mathcal{S}' = \{\rho_1, j\rho_1, j^2\rho_1, \rho_2, j\rho_2, j^2\rho_2\}$
   On a donc montré qu'un complexe z était racine de $X^3 + pX + q$ si, et seulement si, $\exists (u, v) \in \mathcal{S}'^2$: $\begin{cases} z = u + v \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$

Si $p=0$ alors X^3+pX+q a pour racines les racines troisième de $-q$. Supposons désormais que $p\neq 0$ ce qui implique $r_1r_2\neq 0$ puis $\rho_1\rho_2\neq 0$
Grâce aux relation coefficients/racines, $\rho_1^3\rho_2^3=-p^3/27$ donc si $u\in\mathcal{S}'$ alors $u^3\in\{r_1^3,r_2^3\}$ puis $\left(-\dfrac{p}{3u}\right)^3\in\{r_1^3,r_2^3\}$ puis $-\dfrac{p}{3u}\in\mathcal{S}'$
Par conséquent, l'ensemble des racines de X^3+pX+q est

$$\mathcal{S}=\{\rho_1-\frac{p}{3\rho_1},j\rho_1-\frac{p}{3j\rho_1},j^2\rho_1-\frac{p}{3j^2\rho_1},\rho_2-\frac{p}{3\rho_2},j\rho_2-\frac{p}{3j\rho_2},j^2\rho_2-\frac{p}{3j^2\rho_2}\}$$

Enfin, comme $r_1^3r_2^3=-p^3/27$, il existe $k_0\in[\![0,2]\!]$ tel que $r_1r_2=-\dfrac{p}{3}j^{kk_0}$. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\rho_2j^k-\dfrac{p}{3j^k\rho_2}=-\dfrac{p}{3j^{-k-k_0}\rho_1}+\rho_1j^{-k-k_0}$ puis

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\rho_1-\frac{p}{3\rho_1},\ j\rho_1-\frac{pj^2}{3\rho_1},\ j^2\rho_1-\frac{pj}{3\rho_1}\right\}}$$

6. Si p et q sont des réels alors $\Delta=q^2+4p^3/27$ aussi.
   • Si $\Delta\geq 0$ alors les solutions de $(*)$ sont

$$\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\quad,\quad j\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+j^2\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

et

$$j^2\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+j\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

La première racine est réelle et les deux dernières se réécrivent, grâce à la relation $1+j+j^2=0$,

$$j\left(\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\right)-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

et

$$j^2\left(\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\right)-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

Elles sont donc réelles si et seulement si Δ est nul.

• Si $\Delta<0$ et si on note $\dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}=\rho e^{i\theta}$ alors les solutions de $(*)$ sont

$$\sqrt[3]{\rho}\left(e^{i\theta/3}+e^{-i\theta/3}\right),\quad\sqrt[3]{\rho}\left(je^{i\theta/3}+j^2e^{-i\theta/3}\right)\quad\text{et}\quad\sqrt[3]{\rho}\left(j^2e^{i\theta/3}+je^{-i\theta/3}\right)$$

qui sont toutes les trois réelles car respectivement égales à :

$$2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3)\quad,\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3+2\pi/3)\quad\text{et}\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3-2\pi/3)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les solutions de } (*) \text{ sont toutes réelles si et seulement si } \Delta=q^2+4p^3/27\leq 0.}$$

Si on fait l'étude des variations du polynôme Q, on obtient :
• Si $p\geq 0$ alors l'application $x\mapsto Q(x)$ est strictement croissante donc Q admet au plus une racine réelle. Ainsi, toutes les racines de Q sont réelles si et seulement si Q a une racine triple ce qui est équivalent à $p=q=0$.

• Si $p<0$ alors l'application $x\mapsto Q(x)$ est strictement croissante sur $]-\infty,-\sqrt{-p/3}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{-p/3},\sqrt{-p/3}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{-p/3},\infty[$.
Comme $Q\left(-\sqrt{-p/3}\right)=\dfrac{-2p}{3}\sqrt{-p/3}+q$ et $Q\left(\sqrt{-p/3}\right)=\dfrac{2p}{3}\sqrt{-p/3}+q$, le polynôme Q a trois racines réelles si et seulement si

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-p/3}<q<\frac{-2p}{3}\sqrt{-p/3}$$

i.e. si et seulement si $q^2<-4p^3/27$.

$$\boxed{\text{On retrouve que le polynôme } Q \text{ a trois racines réelles si et seulement si } \Delta\leq 0.}$$

7. Avec les notations précédentes, on a $p=q=-6$ donc $\Delta=4$. Les racines de Q sont donc

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\quad,\quad j\sqrt[3]{2}+j^2\sqrt[3]{4}\quad\text{et}\quad j^2\sqrt[3]{2}+j\sqrt[3]{4}$$

Les solutions de $x^3-3x^2-3x-1=0$ sont donc

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1\quad,\quad j\sqrt[3]{2}+j^2\sqrt[3]{4}+1\quad\text{et}\quad j^2\sqrt[3]{2}+j\sqrt[3]{4}+1$$