Corrigé du devoir à rendre le 3/11/2025

Exercice 1 : Soit E un ensemble. Pour tout couples (A, B) de parties de E, on pose :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Soient A, B et C des parties de E

1. *Illustrer la définition de $A\Delta B$ par un dessin.*
2. Comme $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$, on a bien $\boxed{A\Delta B = B\Delta A}$
3. On a $A \cup E = E$ et $A \cap E = A$, on a $\boxed{A\Delta E = E \setminus A = \bar{A}}$

   De même, $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$, donc $\boxed{A\Delta\emptyset = A}$

   $A \cup A = A \cap A = A$, donc $\boxed{A\Delta A = \emptyset}$

   $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$, donc $\boxed{A\Delta\bar{A} = E}$
4. Tout d'abord, on remarque que

$$\begin{aligned}A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)\\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}\\ &= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})\\ &= \big((A \cup B) \cap \bar{A}\big) \cup \big((A \cup B) \cap \bar{B}\big)\\ &= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A\Delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)}$

   Enfin, on a $\bar{A} \setminus \bar{B} = \bar{A} \cap B = B \setminus A$ et, de même $\bar{B} \setminus \bar{A} = A \setminus B$, donc

$$\bar{A}\Delta\bar{B} = (\bar{A} \setminus \bar{B}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A}) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A\Delta B$$

   Donc $\boxed{A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}}$
5. Par définition, $A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{A\cup B}\mathbf{1}_{\overline{A\cap B}} = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B}$
6. On a

$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap (\overline{A \cap B \cap C}))\\ &= [A \cap (B \cup C)] \cap (\overline{A} \cup \overline{B \cap C})\\ &= \left[A \cap (B \cup C) \cap \overline{A}\right] \cup \left[A \cap (B \cup C) \cap \overline{B \cap C}\right]\\ &= \emptyset \cup [A \cap (B\Delta C)]\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)}$
   ou, en utilisant les fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C)\\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C + 2\mathbf{1}_C(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\\ &= \mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C}$
7. On a

$$A\Delta(B\Delta C) = (A \cap \overline{B\Delta C}) \cup (\overline{A} \cap (B\Delta C))$$

   Or, $B\Delta C = (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})$ et $\overline{B\Delta C} = (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$ donc

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= (A \cap ((\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)) \cup (\overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})))\\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)\end{aligned}$$

   En échangeant les rôles joués par A et C, on a $A\Delta(B\Delta C) = C\Delta(B\Delta A)$ donc

$$\boxed{A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C}$$

   ou, en utilisant les fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\cap(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C)\\ &= \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} - 2\mathbf{1}_{A\cap B}\mathbf{1}_{A\cap C}\\ &= \mathbf{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)}$
8. Pour tout entier n non nul, on définit l'assertion $H(n)$: "si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de n parties de E, alors $A_1\Delta A_2...\Delta A_n$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n"
   Les assertions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Supposons $H(n)$ vraie pour un certain entier non nul.
   Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n+1}$ est une famille de $+1n$ parties de E.
   Soit $x \in A_1\Delta A_2...\Delta A_{n+1} = (A_1\Delta A_2...\Delta A_n)\Delta A_{n+1}$ alors

— soit $x \in (A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_n)$ et $x \notin A_{n+1}$ et dans ce cas x appartient à à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n et n'appartient pas à A_{n+1} donc x appartient à à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_{n+1}.
— soit $x \notin (A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_n)$ et $x \in A_{n+1}$ et dans ce cas x appartient à à un nombre pair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n et appartient à A_{n+1} donc x appartient à à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_{n+1}.

Réciproquement, si x appartient à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_{n+1} alors
— soit x appartient à A_{n+1} et donc x appartient à un nombre pair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n i.e. $x \notin A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_n$ et ainsi
$x \in (A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_n) \Delta A_{n+1} = A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_{n+1}$.
— soit x n'appartient pas à A_{n+1} et donc x appartient à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n d'où
$x \in (A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_n) \Delta A_{n+1} = A_1 \Delta A_2 ... \Delta A_{n+1}$.

Ainsi, $H(n+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, pour tout entier n, l'assertion $H(n)$ est vraie.

9. On a déjà montré que $\emptyset \Delta B = B$.
Réciproquement, supposons que $A \Delta B = B$ et que A soit non vide alors il existe $x \in A$ et
— soit $x \in B$ et dans ce cas, $x \in A \cap B$ ce qui est impossible car x appartient à $B = A \Delta B$
— soit $x \in \overline{B}$ donc $x \in A \cap \overline{B} \subset A \Delta B$ puis $x \in B$ ce qui est impossible.
Par conséquent, $A \Delta B = B \Rightarrow A = \emptyset$ puis $\boxed{A \Delta B = B \Leftrightarrow A = \emptyset}$

10. D'après la question précédente et la question 4, on a :
$$A \Delta B = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} \Delta \overline{B} = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = E.$$
Donc
$$\boxed{A \Delta B = \overline{B} \Leftrightarrow A = E}$$

11. Supposons $A \Delta B = A \Delta C$ et montrons que $B = C$.
Soit $x \in B \cap \overline{C}$ alors
— soit $x \in A$ et alors $x \in A \Delta C$ donc $x \in A \Delta B \cap (A \cap B) = \emptyset$
— soit $x \in \overline{A}$ et alors $x \in A \Delta B$ donc $x \in A \Delta C \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = \emptyset$
Donc $B \cap \overline{C} = \emptyset$ i.e. $B \subset C$. Par symétrie, on a $C \subset B$ puis $B = C$. Ainsi
$$\boxed{A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C}$$

Exercice 2 : Soit $f \in F^E$.

1. *Démontrer que* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.
Soit $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. Par définition, il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$. Ainsi $y \in f(A) \cap B$, ce qui prouve $\boxed{f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) \subset f(A) \cap B.}$

Réciproquement soit $x \in f(A) \cap B$. Par définition il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$. Comme $f(a) = x \in B$, on a $a \in f^{-1}(B)$ donc $a \in A \cap f^{-1}(B)$. Par suite $x = f(a) \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$, ce qui prouve que $\boxed{f(A) \cap B \subset f\left(A \cap f^{-1}(B)\right).}$

Par suite $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.}$

2. *Montrer que f est bijective si et seulement si* $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

• Supposons f bijective . Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, montrons que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
Soit $x \in f(\overline{A})$. Il existe donc $b \in \overline{A}$ tel que $x = f(b)$. Pour tout $a \in A$, $b \neq a$, l'injectivité de f implique donc que, pour tout $a \in A$, $f(b) \neq f(a)$. Par suite $x = f(b) \notin f(A)$ c'est-à-dire $x \in \overline{f(A)}$. On a donc prouvé $\boxed{f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.}$
Soit $x \in \overline{f(A)}$. Comme f est surjective, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Comme $x \notin f(A)$, $t \notin A$ donc $t \in \overline{A}$. Ainsi $x = f(t) \in f(\overline{A})$, ce qui prouve que $\boxed{\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}).}$

• Supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ et montrons que f est bijective.
On a $f(E) = f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = F$ donc f est surjective.
Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $x \neq x'$. On a $x' \in \overline{\{x\}}$ donc
$$f(x') \in f(\overline{\{x\}}) = \overline{f(\{x\})} = \overline{\{f(x)\}}$$
donc $f(x) \neq f(x')$ ce qui prouve l'injectivité de f.

Ainsi f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Exercice 3 : Soit $f\,:\,z\mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Pour tout complexe z différent de i, le complexe $\dfrac{z+i}{z-i}$ existe.
De plus, pour tout complexe z, on a
$$f(z)=1\Leftrightarrow z+i=z-i$$
donc $f(z)\neq 1$.
L'application f est donc à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
Soit $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a
$$f(z)=Z\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}=Z\Leftrightarrow z+i=Z(z-i)$$
car $z\neq i$. Ainsi
$$f(z)=Z\Leftrightarrow z(Z-1)=i+iZ\Leftrightarrow z=\frac{i(1+Z)}{Z-1}$$
car $Z\neq 1$.
Par conséquent, tout complexe $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ admet un unique antécédent par f égal à $\dfrac{i(1+Z)}{Z-1}$. Autrement dit, f réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on a
$$\boxed{f^{-1}\,:\,\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}\setminus\{i\},\ z\mapsto\frac{i(1+Z)}{Z-1}.}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $|f(x)|^2=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$ donc $|f(z)|=1$. Ainsi, $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{U}$.
De plus, l'application f est à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
On a donc $\boxed{f(\mathbb{R})\subset\mathbb{U}\setminus\{1\}}$.
Réciproquement, soit $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, alors $z=f(t)$ avec $t=\dfrac{i(1+z)}{z-1}$. Il reste à prouver que t est réel.
Comme z est de module 1, il existe un réel θ tel que $z=e^{i\theta}$. Par conséquent :
$$t=\frac{i(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}-1}=\frac{2i\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}\in\mathbb{R}$$
Par suite, $\boxed{\mathbb{U}\setminus\{1\}\subset f(\mathbb{R})}$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$ différent de 1.
On a $f(ix)=\dfrac{ix+i}{ix-i}=\dfrac{x+1}{x-1}\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{f(i\mathbb{R}\setminus\{i\})\subset\mathbb{R}.}$
Réciproquement, soit $x\in\mathbb{R}$, alors $z=f(t)$ avec $t=\dfrac{i(1+z)}{z-1}$. Comme t est imaginaire pur différent de i, on a donc $\boxed{\mathbb{R}\subset f(i\mathbb{R}\setminus\{i\}).}$

4. Soit z un complexe distinct de i alors
$$f(z)=\frac{z+i}{z-i}=\frac{|z|^2+2i\text{Ré}(z)-1}{|z-1|^2}$$
Ainsi,
$$z\in\mathbb{D}\Leftrightarrow \text{Ré}(f(z))<0\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{Q}^-$$
Par suite, comme f est surjective, $\boxed{f(\mathbb{D})=\mathbb{Q}^-.}$
Soit z un complexe distinct de i alors
$$z\in\mathbb{Q}^-\Leftrightarrow \text{Ré}(z)<0\Leftrightarrow \text{Im}(f(z))<0\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{P}^-$$
Par suite, comme f est surjective, $\boxed{f(\mathbb{Q}^-)=\mathbb{P}^-.}$

Complément : On cherche à généraliser les résultats obtenus
Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur birapport par
$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

1. Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4.
L'argument du birapport $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ est la différence des angles $\widehat{\overrightarrow{M_1M_4},\overrightarrow{M_1M_3}}$ et $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4},\overrightarrow{M_2M_3}}$.

Si les points sont alignés alors ces angles sont tous les deux nuls modulo π et l'argument du birapport $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ est lui aussi nul modulo π. Le birapport est donc réel.
Si les points sont cocycliques et si Ω est le centre du cercle passant par M_1, M_2, M_3 et M_4 alors l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_1M_4},\overrightarrow{M_1M_3}}$ est égal à la moitié de $\widehat{\overrightarrow{\Omega M_4},\overrightarrow{\Omega M_3}}$ modulo π et il en est de même pour l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4},\overrightarrow{M_2M_3}}$ Ainsi, l'argument du birapport $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ est nul modulo π.
Ainsi, si les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés ou cocycliques alors birapport $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ est réel

Réciproquement supposons que le birapport $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ soit réel.
Si les points M_1, M_3 et M_4 sont alignés alors $\dfrac{(z_1-z_4)}{(z_1-z_3)}$ est réel donc $\dfrac{(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)}$ aussi ce qui prouve que l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4},\overrightarrow{M_2M_3}}$ est plat puis que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés.
Sinon, il existe un unique cercle passant par M_1, M_3 et M_4 constitué des points M_3, M_4 et des points M tels que $\widehat{\overrightarrow{MM_4},\overrightarrow{MM_3}}\equiv\widehat{\overrightarrow{M_2M_4},\overrightarrow{M_2M_3}}\ [\pi]$. Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 son cocycliques.

Par conséquent,

$$\boxed{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \text{ ssi les points d'affixes } z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ et } z_4 \text{ sont alignés ou cocycliques.}}$$

Soient a, b, c et d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc$ soit non nul. On définit la fonction

$$f\,:\,z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

2. Soit z et z' deux complexes tels que $z \neq -d/c$. On a

$$f(z) = z' \Leftrightarrow (cz+d)z' = az+b \Leftrightarrow z(cz'-a) = b - dz'$$

Ainsi, si $z' \neq a/c$ alors z' admet un unique antécédent $\dfrac{b-dz'}{cz'-a}$
Si $z' = a/c$ alors il admet un antécédent si et seulement si $b - dz' = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $ad - bc \neq 0$.
Par conséquent, si c est non nul alors f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ dont la réciproque est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{C} \setminus \{a/c\} & \to \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ z & \mapsto \dfrac{b-dz}{cz-a} \end{array}}$$

Si $c = 0$ alors ad est non nul et f réalise une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même d'inverse

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \dfrac{dz-b}{a} \end{array}}$$

3. Si c est nul alors f est une similitude directe.
Sinon,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \qquad f(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}\frac{bc-ad}{z+d/c}$$

Ainsi, $f = \phi \circ i \circ \psi$ où

$$\psi\,:\,z \mapsto z + d/c \quad \text{et} \quad \phi\,:\,z \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}z$$

4. Montrons que les similitudes directes et i conservent le birapport.
Soient A et B deux complexes avec A non nul et $g\,:\,z \mapsto Az + B$.
Pour tous complexes distincts z_1, z_2, z_3 et z_4, on a :

$$[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = \frac{(Az_1 - Az_3)(Az_2 - Az_4)}{(Az_1 - Az_4)(Az_2 - Az_3)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Si les complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont non nuls alors

$$[z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}, z_4^{-1}] = \frac{(z_1^{-1} - z_3^{-1})(z_2^{-1} - z_4^{-1})}{(z_1^{-1} - z_4^{-1})(z_2^{-1} - z_3^{-1})} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Comme composée de fonctions conservant le birapport, f conserve le birapport.

5. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{D}$ d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, on a

$$z \in D \Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z)] \in \mathbb{R}$$

Comme f est bijective les points d'affixes respectives $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ sont distincts.
S'ils sont alignés alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant ces points, alors on a

$$\boxed{f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,:\,M(z) \in \mathcal{D}'\}}$$

Sinon, il existe un unique cercle $\mathcal{C}'$ passant pas ces trois points et on a

$$\boxed{f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,:\,M(z) \in \mathcal{C}'\}}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour être dans le premier cas est donc l'alignement des points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$.

6. Les points d'affixe $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ sont alignés si et seulement si le rapport

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_1) - f(z_3)} = \frac{(z_2 - z_1)(cz_3 + d)}{(z_3 - z_1)(cz_2 + d)}$$

est réel donc si et seulement si le birapport $[z_1, z_2, z_3, -d/c]$ est réel donc si, et seulement si, les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et $-d/c$ sont alignés ou cocycliques.

7. On a

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), a/c] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

donc le birapport $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), a/c]$ est réel donc si, et seulement si, les points d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés.

8. Soit I le point d'affixe $-d/c$ et J celui d'affixe a/c
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par les points distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 différente de $-d/c$.

— Si I appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celle-ci passe par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \setminus \{-d/c\} \,:\, M(z) \in \mathcal{D}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, M(z) \in \mathcal{D}' \setminus \{J\}\}$$

— Si I n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$ alors si on appelle $\mathcal{C}'$ le cercle passant par les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celui-ci passe par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \,:\, M(z) \in \mathcal{D}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, M(z) \in \mathcal{D}' \setminus \{J\}\}$$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par les points distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 différente de $-d/c$.

— Si I appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celle-ci ne passe pas par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \setminus \{-d/c\} \,:\, M(z) \in \mathcal{C}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, M(z) \in \mathcal{D}'\}$$

— Si I n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$ alors si on appelle $\mathcal{C}'$ le cercle passant par les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celui-ci ne passe pas par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \,:\, M(z) \in \mathcal{C}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, M(z) \in \mathcal{C}'\}$$