Devoir à rendre le 03/11/2025

Exercice 1 : Soit E un ensemble. Pour tout couple (A, B) de parties de E, on pose :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Soient A, B et C des parties de E

1. Illustrer la définition de $A\Delta B$ par un dessin.
2. Montrer que la loi Δ est commutative, c'est-à-dire $A\Delta B = B\Delta A$.
3. Déterminer $A\Delta E$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta\overline{A}$.
4. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
5. Déterminer la fonction indicatrice de $A\Delta B$ en fonctions de la somme et du produit de celles de A et B.
6. Prouver que la loi $\cap$ est distributive par rapport à la loi Δ, c'est-à-dire
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$
On pourra utiliser la question 5.
7. Montrer que la loi Δ est associative i.e. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
On pourra utiliser la question 5.
8. Montrer que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de n parties de E alors $A_1\Delta A_2...\Delta A_n$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un nombre impair de parties parmi A_1, A_2,.., A_n, c'est-à-dire
$$A_1\Delta A_2...\Delta A_n = \left\{x \in E \ :\ \#\{k \in [\![1, n]\!] \ :\ x \in A_k\} \equiv 0[2]\right\}$$
9. Prouver que $A\Delta B = B \Leftrightarrow A = \emptyset$.
10. Prouver que $A\Delta B = \overline{B} \Leftrightarrow A = E$.
11. Prouver que $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 2 : Soit $f \in F^E$, montrer que

1. Démontrer que $\forall(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F),\ \ f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Exercice 3 : Soit $f\ :\ z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et déterminer sa réciproque.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$
3. Montrer que $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
4. On considère les ensembles $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$, $\mathbb{Q}^- = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \text{Ré}(z) < 0\}$ et $\mathbb{P}^- = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \text{Im}(z) < 0\}$.
Montrer que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}^-$, $f(\mathbb{Q}^-) = \mathbb{P}^-$ et $f(\mathbb{P}^-) = \mathbb{D}$.

Complément : On cherche à généraliser les résultats obtenus
Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur birapport par
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

1. Montrer que le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est réel si et seulement si les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés ou cocycliques.

   Soient a, b, c et d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc$ soit non nul. On définit la fonction
$$f\ :\ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$
2. Montrer que si c est non nul alors f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ et déterminer sa réciproque.
Qu'en est-il si c est nul ? Dans la suite, on suppose $c \neq 0$.
3. Montrer que f peut s'écrire comme composée de similitudes directes et de l'application i de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même qui à z associe $1/z$.
4. Montrer que f conserve le birapport.
5. En déduire que si $\mathcal{D}$ est une droite et si $D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}\ :\ M(z) \in \mathcal{D}\}$ alors
— soit il existe une droite $\mathcal{D}'$ telle que $f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\ :\ M(z) \in \mathcal{D}'\}$;
— soit il existe un cercle $\mathcal{C}'$ tel que $f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\ :\ M(z) \in \mathcal{C}'\}$.
Donner une conditions nécessaire et suffisante sur les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ pour que la première alternative se réalise.
6. Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes distincts différents de $-d/c$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z_1, z_2 et z_3 pour que les points d'affixe $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ soient alignés.
7. Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes distincts différents de $-d/c$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z_1, z_2 et z_3 pour que $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), a/c] \in \mathbb{R}$
8. Décrire précisément l'image d'une droite ou d'un cercle par f.