Corrigé du devoir à rendre le 14/11/2025

Exercice 1 :

1. La fonction $\ln_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car la fonction ln l'est et que $\ln(a) \neq 0$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}\dfrac{1}{x}$.

   Ainsi, si $a > 1$ alors $\ln_a$ est de dérivée positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc croissante et si $a < 1$ alors $\ln_a$ est de dérivée négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc décroissante.

2. Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+\star}\right)^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\ln_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)} = \ln_a(x) + \ln_a(y) \\
\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \frac{-\ln(x)}{\ln(a)} = -\ln_a(x) \\
\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{\ln(a)}\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)}(\ln x - \ln y) = \ln_a(x) - \ln_a(y) \\
\ln_a(x^n) &= \frac{\ln(x^n)}{\ln(a)} = \frac{n\ln(x)}{\ln(a)} = n\ln_a(x) \\
\ln_a(a^n) &= n\ln_a(a) = n
\end{aligned}$$

3. Si $a > 1$ alors la fonction $\ln_a$ est de dérivée strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\ln_a\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$. Comme $\ln(a) > 0$ et comme

$$\lim_{x\to-\infty} \ln = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln = +\infty,$$

   on a

$$\lim_{x\to-\infty} \ln_a = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln_a = +\infty,$$

   donc $\ln_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$

   Si $a < 1$ alors la fonction $\ln_a$ est de dérivée strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\ln_a\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$. Comme $\ln(a) < 0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \ln_a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln_a = -\infty,$$

   donc $\ln_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$

4. Par définition, $\exp_a$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}$, on a

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow \ln_a(y) = x \Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \Leftrightarrow y = \exp\left(x\ln(a)\right) = a^x$$

   Ainsi, on a

$$\boxed{\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star},\ x \mapsto a^x}$$

Exercice 2 :

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(e^{kx+y} - e^{-kx-y}\right)}{2} = \frac{e^y}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx} - \frac{e^{-y}}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx}$$

   Si $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$ puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) &= \frac{e^y}{2}\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} - \frac{e^{-y}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \\
&= \frac{e^y}{2}\frac{e^{(n+1)x/2}\left(e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}\right)}{e^{x/2}\left(e^{-x/2} - e^{x/2}\right)} \\
&\quad - \frac{e^{-y}}{2}\frac{e^{-(n+1)x/2}\left(e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}\right)}{e^{-x/2}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)} \\
&= \frac{e^y e^{nx/2}}{2}\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)} - \frac{e^{-y}e^{-nx/2}}{2}\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}
\end{aligned}$$

   Ainsi, si $x \neq 0$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = \mathrm{sh}\left(y + nx/2\right)\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}.}$$

   et si $x = 0$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx+y) = (n+1)\mathrm{sh}(y)}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{sh}(kx+y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left(e^{kx+y}-e^{-kx-y}\right)}{2}\\ &= \frac{e^{y}}{2}\left(1+e^{x}\right)^{n}-\frac{e^{-y}}{2}\left(1+e^{-x}\right)^{n}\\ &= \frac{e^{y}}{2}e^{nx/2}2^{n}\operatorname{ch}^{n}(x/2)-\frac{e^{-y}}{2}e^{-nx/2}2^{n}\operatorname{ch}^{n}(x/2)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{sh}(kx+y)=2^{n}\operatorname{sh}(y+nx/2)\operatorname{ch}^{n}(x/2)}$$

Exercice 3 :

Soit $f\,:\,x\mapsto\arccos(\operatorname{th}x)+2\arctan(e^{x})$.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{th}x\in]-1,1[$ et la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ donc la fonction $x\mapsto\arccos(\operatorname{th}x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $x\mapsto e^{x}$ et $x\mapsto\arctan x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x\mapsto2\arctan(e^{x})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Par suite, la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.
2. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ et la fonction arccos est dérivable sur $[-1,1]$ donc la fonction $x\mapsto\arccos(\operatorname{th}x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Les fonctions $x\mapsto e^{x}$ et $x\mapsto\arctan x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x\mapsto2\arctan(e^{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Par suite, la fonction f est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}}$.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

   $$\begin{aligned}f'(x) &= \left(1-\operatorname{th}^{2}x\right)\frac{-1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^{2}x}}+\frac{2e^{x}}{1+e2x}=\sqrt{1-\operatorname{th}^{2}x}+\frac{2e^{x}}{1+e^{2x}}\\ &= -\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^{2}x}}+\frac{2e^{x}}{1+e^{2x}}\end{aligned}$$

   Comme $\operatorname{ch}x\geq0$, on en déduit que

   $$f'(x)=-\frac{1}{\operatorname{ch}x}+\frac{2e^{x}}{1+e^{2x}}=-\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}+\frac{2e^{x}}{1+e^{2x}}=0$$

   Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que la fonction f est constante. Or,

   $$f(0)=\arccos(0)+2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{4}=\pi$$

   Le graphe de f est donc la droite d'équation $\boxed{y=\pi.}$