Devoir à rendre le 14/11/2025

Exercice 1 : Soit a un réel strictement positif différent de 1. On appelle logarithme de base a la fonction $\ln_a$ de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\ln_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

1. Étudier la monotonie de la fonction $\ln_a$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'on a on a

$$\begin{aligned}
\ln_a(xy) &= \ln_a(x) + \ln_a(y)\\
\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln_a(x))\\
\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln_a(x) - \ln_a(y)\\
\ln_a(x^n) &= n\ln_a(x)\\
\ln_a(a^n) &= n
\end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction $\ln_a$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\exp_a$ la réciproque du logarithme de base a.

Exercice 2 :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx + y) = \mathrm{sh}\,(y + nx/2)\,\frac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(kx + y) = 2^n \mathrm{sh}(y + nx/2)\mathrm{ch}^n(x/2)$.

Exercice 3 : Soit $f : x \mapsto \arccos(\mathrm{th}x) + 2\arctan(e^x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
3. Tracer le graphe de f.