Devoir à rendre le 24/11/2025

Dans cet exercice, on étudie une équation différentielle fréquemment rencontrée en Physique. On considère deux nombres réels positifs λ et ω_0 ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

Il s'agit de l'équation générale d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement λ.

Étude du régime libre :

1. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors la quantité $E = (\omega_0^2 y^2 + y'^2)/2$ décroit au cours du temps. Cette quantité est proportionnelle à l'énergie du système.
2. Donner la forme générale des solution suivant que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :
   — $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique),
   — $\lambda = \omega_0$ (régime critique)
   — ou $\lambda > \omega_0$ (régime apériodique).

   On se place maintenant dans le cas $\lambda < \omega_0$ et on note $E_n = E(t_n)$ l'énergie du système à l'instant $t_n = \dfrac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.
3. Donner et tracez la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. Montrer que, pour cette solution,
   $$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-\delta}$$
   avec δ un réel à exprimer en fonction de λ et ω_0. Ce nombre s'appelle le décrément logarithmique. Il mesure à quelle vitesse le système perd de l'énergie.
5. Montrer que δ est une fonction croissante de λ.

Étude du régime forcé :

On modifie maintenant l'équation différentielle en introduisant un terme de forçage sinusoïdal à la pulsation ω.

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

1. Expliquez pourquoi, le comportement d'une solution de cette équation différentielle lorsque t est suffisamment grand ne dépend pas des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$.
2. Trouvez une solution particulière de la forme $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$.

   Pour étudier la fonction $H(\omega)$, on pose $m = \lambda/\omega_0$, $x = \omega/\omega_0$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ par
   $$f(x) = \frac{1}{1 - x^2 + 2imx}$$
3. Tracez le graphe de l'argument principal (appartenant à e $]-\pi, \pi]$) de f.

   On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.
4. On suppose maintenant que $m < 1/\sqrt{2}$. Étudiez les variations de $g = |f|^2$ et montrer que g possède un maximum global g_m que l'on tracera en fonction de m.
5. Tracez le graphe de g en fonction de x. On distinguera les cas $m < 1/\sqrt{2}$ et $m > 1/\sqrt{2}$.

   Ce phénomène s'appelle la résonance. Si le système est peu amorti (m est petit), alors le maximum global g_m est grand. Remarquez que la condition pour observer une résonance est $m < 1/\sqrt{2}$ alors qu'en régime libre, on observe des oscillation si $m < 1$.