Corrigé du devoir à rendre le 8/12/2025

Exercice 1 :
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in A \times B$, $a \leq b$.

1. *Montrer que A admet une borne supérieure.*
   Comme B est non vide, il existe $b \in B$ et $\forall a \in A$, $a \leq b$ donc A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure.
2. *Montrer que B admet une borne inférieure.*
   Comme A est non vide, il existe $a \in A$ et $\forall b \in B$, $a \leq b$ donc B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.
3. *Prouver que $\text{Sup}A \leq \text{Inf}B$.*
   Soit $a \in A$ alors, d'après la question précédente, a est un minorant de B donc $a \leq \text{Inf}B$. On a donc : $\forall a \in A, \quad a \leq \text{Inf}B$; ce qui prouve que $\text{Inf}B$ est un majorant de A donc $\boxed{\text{Sup}A \leq \text{Inf}B}$

Exercice 2 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$.

1. *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite avec plusieurs valeurs de a.*
   On trace le graphe de la fonction $f : x \mapsto 1 + x^2/4$. Pour le positionner par rapport à la première bissectrice, on remarque que pour tout réel x, on a :
   $$f(x) \geq x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2) \geq 0.$$
   Ainsi, le graphe de f est situé au-dessus de la première bissectrice et l'intersecte au point de coordonnées $(2,2)$.
2. *Intuiter le comportement de la suite u en fonction de a.*
   Il semble que si $a \in [-2,2]$, alors u converge vers 2 et que sinon elle diverge vers $+\infty$.
3. *Prouver votre conjecture.*
   Comme on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$, on a pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. La suite u est donc croissante quelle que soit la valeur de a.
   De plus, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.
   Enfin, si la suite u converge vers ℓ, alors en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$, on obtient $\ell = 1 + \ell^2/4$ donc $\ell = 2$.

   • Supposons $a \in [-2,2]$.
   Le segment $[-2,2]$ est stable par f car pour tout $x \in [-2,2]$, $0 \leq x^2 \leq 4$ donc $1 \leq 1 + x^2/4 \leq 2$ soit $f(x) \in [-2,2]$. Par conséquent, comme $u_0 \in [-2,2]$, on a $u_n \in [-2,2]$ pour tout entier n.
   La suite u est donc majorée puis convergente grâce au théorème de la limite monotone. La suite u converge donc vers 2.

   • Supposons $a \notin [-2,2]$.
   et la suite u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_1$.
   Si la suite était convergente elle convergerait vers 2. Comme la suite u est croissante, on obtiendrait alors $2 \geq u_1$. Or $|u_0| > 2$ donc $u_1 = 1 + u_0^2/4 > 2$; ce qui est absurde. Par conséquent, la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante.

1. *Soit $E = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$. Montrer que E admet une borne supérieure.*
   Comme $f(0) \in\leq [0,1]$, $0 \in E$ donc E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide. De plus, E est majorée par 1. Par suite, E admet une borne supérieure.
   Comme E est minorée par 0 et majorée par 1, on a $s \in [0,1]$. La quantité $f(s)$ est donc définie.
2. *On pose $s = \text{Sup}E$ et on va montrer que $f(s) = s$.*
   (a) *On suppose (par l'absurde) que $f(s) > s$. En déduire que $f(s) \in E$ et conclure à une absurdité.*
   Si $f(s) > s$ alors la croissance de f implique que $f(f(s)) > f(s)$ donc $f(s) \in E$. En particulier, $f(s) \leq \text{Sup}E = s$. On aboutit à une contradiction.
   (b) *On suppose (par l'absurde) que $f(s) < s$. En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $f(s) < x \leq s$ et conclure à une absurdité.*
   Si $f(s) < s = \text{Sup}E$ alors $f(s)$ n'est pas un majorant de E donc il existe $x \in E$ tel que $f(s) < x$. Comme $x \in E$, on a donc : $f(s) < x \leq s$.
   Par croissance de f, on en déduit que $f(x) \leq f(s)$. Mais $x \in E$ donc $x \leq f(x)$ puis $x \leq f(x) \leq f(s) < x$; ce qui est absurde
   (c) *Conclure.*
   Les hypothèses $f(s) < s$ et $f(s) > s$ conduisent à des absurdité donc
   $$\boxed{f(s) = s}$$
   On a donc montré que toute fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ possède un point fixe.