

## Corrigé du devoir à rendre le 5/01/2026

### Exercice 1

Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$  tel que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ . On définit la suite  $u$  par  $u_0 \in \mathbb{C}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

On suppose que  $u_0$  est tel que la suite soit bien définie.

1. On suppose que  $u$  converge.

(a) Montrer que si  $u$  converge alors sa limite est racine d'une équation du second degré (\*).

Supposons que la suite  $u$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = a\ell + b$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (cu_n + d) = c\ell + d$ .

Pour affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{a\ell + b}{c\ell + d}$ , il faut s'assurer que  $c\ell + d \neq 0$ .

Si c'était le cas, alors on aurait  $\ell = -d/c$  car  $c \neq 0$  puis  $a\ell + b \neq 0$  car  $ad - bc \neq 0$ ; ce qui impliquerait la divergence de la suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Par conséquent,  $c\ell + d \neq 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{a\ell + b}{c\ell + d} = \frac{az + b}{cz + d}$  et, par unicité de la limite  $\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d}$  puis  $\ell(c\ell + d) = a\ell + b$ .

Ainsi,  $\ell$  est racine du polynôme  $\boxed{cX^2 + (d - a)X - b}$  qui est de degré 2 car  $c \neq 0$ .

(b) Soit  $r$  une racine de (\*). Montrer que  $u_{n+1} - r = (u_n - r) \frac{ad - bc}{(cu_n + d)(cr + d)}$

Par définition

$$u_{n+1} - r = \frac{au_n + b}{cu_n + d} - r = \frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{ar + b}{cr + d}$$

car  $r$  est racine de (\*). Ainsi,

$$u_{n+1} - r = \frac{(au_n + b)(cr + d) - (cu_n + d)(ar + b)}{(cu_n + d)(cr + d)} = \boxed{\frac{(ad - bc)(u_n - r)}{(cu_n + d)(cr + d)}}$$

(c) En déduire que  $u$  est constante si et seulement si un de ses termes est racine de (\*)

Si  $u$  est constante à  $\ell$ , alors elle converge vers  $\ell$  donc, d'après la première question, tous ses termes sont racines de (\*).

Réciproquement, si un des termes de  $u$ ,  $u_{n_0}$  est égal à une racine  $r$  de (\*), alors, d'après la question précédente,  $u_{n_0+1} - r$  est nul, et par une récurrence évidente, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = r$ .

De plus, si  $n_0 > 0$ , alors  $\frac{(ad - bc)(u_{n_0-1} - r)}{(cu_{n_0-1} + d)(cr + d)} = 0$ . Comme  $ad - bc \neq 0$ , on en déduit que  $u_{n_0-1} = r$ ; puis, par une récurrence finie évidente, que pour tout  $n \leq n_0$ ,  $u_n = r$ . La suite  $u$  est donc constante.

Désormais on suppose que  $u$  n'est pas constante.

2. On suppose que (\*) a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

(a) Montrer que la suite  $v = \left( \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et géométrique de raison  $\lambda$ .

Comme la suite  $u$  a été supposée non constante, alors, aucun de ses termes n'est racine de (\*) donc, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \neq r_2$ . La suite  $v$  est donc bien définie.

De plus, pour tout entier  $n$ , on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - r_1}{u_n - r_2} \frac{u_n - r_2}{u_n - r_1}$$

ce qui d'après 1.b donne

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(ad - bc)(u_n - r_1)}{(cu_n + d)(cr_1 + d)} \frac{(cu_n + d)(cr_2 + d)}{(ad - bc)(u_n - r_2)} \frac{u_n - r_2}{u_n - r_1} = \frac{cr_2 + d}{cr_1 + d}.$$

La suite  $v$  est donc géométrique de raison  $\boxed{\lambda = \frac{cr_2 + d}{cr_1 + d}}$ .

(b) En déduire  $u$  en fonction de  $\lambda$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $v_n = v_0 \lambda^n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$  donc  $u_n (1 - v_0 \lambda^n) = r_1 - r_2 v_0 \lambda^n$ .

Comme  $r_1 \neq r_2$ ,  $v_n \neq 1$  donc

$$u_n = \frac{r_1 - r_2 v_0 \lambda^n}{1 - v_0 \lambda^n} = \boxed{\frac{r_1(u_0 - r_2) - r_2(u_0 - r_1)\lambda^n}{u_0 - r_2 - (u_0 - r_1)\lambda^n}}.$$

(c) En déduire la nature convergente ou divergente de  $u$ .

- Si  $|\lambda| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$  donc  $u$  converge vers  $\boxed{r_1}$ .

- Si  $|\lambda| > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{-n} = 0$  et, pour tout entier  $n$ ,

$$u_n = \frac{r_1(u_0 - r_2)\lambda^{-n} - r_2(u_0 - r_1)}{(u_0 - r_2)\lambda^{-n} - (u_0 - r_1)}$$

donc  $u$  converge vers  $r_2$ .

- Sinon  $|\lambda| = 1$  et  $\lambda \neq 1$  car  $r_1 \neq r_2$ . La suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc divergente. Or, pour tout entier  $n$ , on a  $v_0 \lambda^n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ . Comme  $v_0 \neq 1$ , si la suite  $u$  converge vers  $\ell \neq r_2$ , alors la suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et si la suite  $u$  converge vers  $r_2$ , alors, comme  $r_1 \neq r_2$ , la suite  $(|\lambda|^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

Comme la suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc divergente et la suite  $(|\lambda|^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante à 1, on en déduit que la suite  $u$  diverge.

3. On suppose que (\*) a une seule racine  $r_0$ .

- (a) Montrer que si  $w = (\frac{1}{u_n - r_0})_{n \in \mathbb{N}}$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + \frac{2c}{a+d}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après 1.b, on a

$$w_{n+1} = \frac{(cu_n + d)(cr_0 + d)}{(ad - bc)(u_n - r_0)} = \frac{cr_0 + d}{ad - bc} \frac{c(u_n - r_0) + cr_0 + d}{u_n - r_0}$$

De plus, comme le polynôme  $cX^2 + (d-a)X - b$  n'a qu'une racine  $r_0$ , on en déduit que  $ad - bc = \frac{(a+d)^2}{4}$  et  $cr_0 + d = \frac{a+d}{2}$  puis

$$w_{n+1} = \frac{2}{a+d} \left( c + \frac{a+d}{2} w_n \right)$$

donc  $w_{n+1} = w_n + \frac{2c}{a+d}$

- (b) En déduire la nature de  $u$ .

La suite  $w$  est arithmétique de raison  $\frac{2c}{a+d}$  donc, pour tout entier  $n$ , on a  $w_n = w_0 + \frac{2cn}{a+d}$  puis  $u_n = r_0 + \frac{a+d}{w_0 + 2cn}$ . Comme  $|w_0 + 2cn| \geq 2|c|n - |w_0|$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_0 + 2cn = +\infty$ . Par conséquent, la suite  $u$  tend vers  $r_0$ .

## Exercice 2 :

On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$ .

- Montrer que la suite  $u$  est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose  $H(n)$  : "  $u_n$  est bien défini et  $\sqrt{n} \leq u_n$ ".

Initialisation :  $H(0)$  est vraie par hypothèse.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H(n)$  soit vraie. On a  $u_n + n + 1 \geq 0$  donc  $u_{n+1}$  est bien défini et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \geq \sqrt{n + 1}$$

Ainsi, la suite  $u$  est bien définie et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}}$$

- Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$ .

La fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction  $g$  est donc décroissante sur  $[0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$ . Elle admet donc un minimum global en 1 égal à  $g(1) = 0$ .

La fonction  $g$  est donc positive sur  $\mathbb{R}^+$  i.e.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)}.$$

- En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$  puis que  $u_n = o(n^2)$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose  $H(n)$  : "  $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$ ".

Initialisation :  $H(0)$  est vraie.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H(n)$  soit vraie. On a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leq \frac{1}{2}(1 + u_n + n + 1) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + n + \frac{u_0}{2^n} + n + 1 \right)$$

donc

$$u_{n+1} \leq n + 1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}}$$

En particulier,  $0 \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{u_0}{n2^n}$ . Le théorème d'encadrement implique alors que :

$$\boxed{u_n = o(n^2)}$$

(c) Montrer que  $u_n = o(n)$  et en déduire un équivalent de  $u_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{u_n}{n} = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{n^2} + \frac{1}{n}}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$  i.e.

$$u_n = o(n)$$

Ainsi,  $n + u_{n-1} \sim n$  donc

$$u_n \sim \sqrt{n}$$

(d) Soit  $v = (u_n - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Prouver que la suite  $v$  converge et donner sa limite.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left( \sqrt{1 + u_{n-1}/n} - 1 \right)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$ , on a  $\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \sim \frac{u_{n-1}}{2n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2}$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

(e) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_{n-1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} \left( 1 - \sqrt{1 - 1/n} \right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2n}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = 0$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$u_n - u_{n-1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1) - \left( \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + o(1) \right) = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + o(1) = o(1)$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_{n-1} = 0$$

(f) Montrer que  $u_{n+1} - u_n$  est de même signe que  $1 + u_n - u_{n-1}$  et en déduire que la suite  $u$  est monotone à partir d'un certain rang.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + n + 1} - \sqrt{u_{n-1} + n} = \frac{u_n + 1 - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + n + 1} + \sqrt{u_{n-1} + n}}$$

donc  $u_{n+1} - u_n$  est de même signe que  $1 + u_n - u_{n-1}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_{n-1} + 1 = 1$ , on en déduit qu'à partir d'un certain rang, la suite  $(u_n - u_{n-1} + 1)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive donc la suite  $u$  est monotone à partir de ce rang.

### Exercice 3 :

1. Prouver que, pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $\frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{1}{n}$  admet sur  $\mathbb{R}^{+*}$  une unique solution que l'on notera  $x_n$ .

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{x}$ .

La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \left( \frac{-1}{x^2} - 2 \right) e^{-x^2} < 0$$

La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{+*}$ . Elle réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $f(\mathbb{R}^{+*})$ .

Comme  $\lim_{0^+} f = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = 0$ ,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

En particulier, pour tout entier  $n$  non nul, le réel strictement positif  $1/n$  admet un unique antécédent.

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

Par définition, pour tout entier  $n$ , on a  $x_n = f^{-1}(1/n)$ .

Comme  $\lim_{+\infty} f = 0$ , on a  $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

3. Montrer que, pour tout entier  $n$  non nul, on a :

$$x_n^2 + \ln x_n = \ln n$$

et en déduire un équivalent de  $x_n$ .

Pour tout entier  $n$  non nul, on a :

$$e^{-x_n^2} = \frac{x_n}{n}$$

donc  $-x_n^2 = \ln(x_n) - \ln n$  i.e.

$$x_n^2 + \ln x_n = \ln n$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ , on a, par croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^2} = 0$

i.e.  $\ln x_n = o(x_n^2)$  donc  $x_n^2 \sim \ln x_n = \ln n$  puis

$$x_n \sim \sqrt{\ln n}$$

4. Soit  $u = (x_n - \sqrt{\ln n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Trouver un équivalent de  $u$  et sa limite.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$(u_n + \sqrt{\ln n})^2 + \ln(u_n + \sqrt{\ln n}) = \ln n$$

soit

$$u_n^2 + 2u_n\sqrt{\ln n} + \ln(u_n + \sqrt{\ln n}) = 0.$$

Comme  $x_n \sim \sqrt{\ln n}$ ,  $u_n = o(\sqrt{\ln n})$  puis  $u_n^2 = o(2u_n\sqrt{\ln n})$ . Ainsi,

$$u_n^2 + 2u_n\sqrt{\ln n} \sim 2u_n\sqrt{\ln n}.$$

D'autre part,

$$\ln(u_n + \sqrt{\ln n}) = \frac{1}{2}\ln(\ln n) + \ln\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right)$$

Comme  $u_n = o(\sqrt{\ln n})$ , on a  $\frac{u_n}{\sqrt{\ln n}} = o(1)$  puis  $\ln\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right) = o(1)$  et, a fortiori,  $\ln\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right) = o(\ln(\ln n))$ . Par suite,

$$\ln(u_n + \sqrt{\ln n}) \sim \frac{1}{2}\ln(\ln n)$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln(\ln n)}{4\sqrt{\ln n}}.$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}} = 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$