Devoir à rendre le 5/01/2026

Exercice 1

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$. On définit la suite u par $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{avec} \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

On suppose que u_0 est tel que la suite soit bien définie.

1. On suppose que u converge.
   (a) Montrer que si u converge alors sa limite est racine d'une équation du second degré $(*)$.
   (b) Soit r une racine de $(*)$. Montrer que $u_{n+1} - r = (u_n - r)\dfrac{ad-bc}{(cu_n+d)(cr+d)}$
   (c) En déduire que u est constante si et seulement si un de ses terme est racine de $(*)$

   Désormais on suppose que u n'est pas constante.
2. On suppose que $(*)$ a deux racines distinctes r_1 et r_2.
   (a) Montrer que la suite $v = \left(\dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et géométrique de raison λ.
   (b) En déduire u en fonction de λ
   (c) En déduire la nature convergente ou divergente de u.
3. On suppose que $(*)$ a une seule racine r_0.
   (a) Montrer que si $w = \left(\dfrac{1}{u_n - r_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alors

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + \frac{2c}{a+d}$$

   (b) En déduire la nature de u.

Exercice 2 :

Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{u_{n-1}+n}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \sqrt{n}$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}(1+x)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que $u_n = o(n^2)$.
   (c) Montrer que $u_n = o(n)$ et en déduire un équivalent de u_n.
3. Soit $v = \left(u_n - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Prouver que la suite v converge et donner sa limite.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1}$.
5. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $1 + u_n - u_{n-1}$ et en déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 3 :

1. Prouver que, pour tout entier n non nul, l'équation $\dfrac{e^{-x^2}}{x} = \dfrac{1}{n}$ admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n^2 + \ln x_n = \ln n$. En déduire un équivalent de x_n.
4. Soit $u = \left(x_n - \sqrt{\ln n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver un équivalent de u et sa limite.