Lycée Saint-Louis DM 9
MPSI

Devoir à rendre le 10/02/2026

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$
L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $(G,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ alors

— soit G est dense (i.e. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \exists z \in G\ :\ x < z < y$)

— soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Soit $(G,+)$ un sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à 0. On considère

$$G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$$

1. Montrer que G^+ admet une borne inférieure appartenant à $\mathbb{R}^+$ notée a.
2. Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ puis que $G = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $a = 0$ alors G est dense.
4. Application : soient a et b deux réels non nuls.
   (a) Montrer que $G_{a,b} = \{an + bm\,,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$
   (b) Prouver que si $G_{a,b}$ n'est pas dense alors a/b est rationnel.
   (c) Conclure.

Exercice 2 :
On note $p : x \mapsto e^x$, $q : x \mapsto e^{2x}$ et $r : x \mapsto e^{x^2}$.
On note $\mathcal{B} = (p,q,r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$.

2. Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer ψ^{-1}.

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = -\dfrac{1}{e-1} f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \dfrac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

4. On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f.
   (a) Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$.
   (b) Déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$, i.e. trouver $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall (A,B,C) \in \mathbb{R}^3, \quad Ap + Bq + Cr \in \mathcal{P} \iff \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$.
   (c) Exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.
5. On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f.
   (a) Déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$
   (c) Donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.
6. Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
7. Prouver que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de terme constant est nul.

8. Montrez que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Soit $(P_k)_{1 \le k \le q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall k \in [\![1,q]\!], \quad \lim_{x \to +\infty} P_{k+1}(x) - P_k(x) = +\infty$$

Pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, on pose $f_k\ :\ x \mapsto \exp\big(P_k(x)\big)$.

9. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \le k \le q}$ est libre.