Raisonnements

Exercice 1 : Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes sur $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ainsi que leur négations.

1. La fonction f est croissante
2. La fonction f est périodique
3. La fonction f est bornée.
4. la fonction f est constante.

Exercice 2 : Montrer que l'implication

$$(\exists x \in E \ : \ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E \ : \ P(x,y))$$

est vraie mais que sa réciproque ne l'est pas forcément.

Exercice 3 : Montrer que l'implication

$$(\exists ! x \in E \ : \ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E \ : \ P(x,y))$$

est vraie mais que sa réciproque ne l'est pas forcément.

Exercice 4 : Montrer que l'implication

$$(\exists ! x \in E : \exists y \in F : P(x,y)) \Rightarrow (\exists y \in F : \exists ! x \in E : P(x,y))$$

est vraie mais que sa réciproque ne l'est pas forcément.

Exercice 5 : Soit u, v et w les suites de réels définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + n + 1 \\ v_{n+1} = v_n + (n+1)^2 \\ w_{n+1} = w_n + (n+1)^3. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad w_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 6 : Montrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow n! \geq 2^n)$$

Exercice 7 :
Soit u une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + ... + u_n)$.
Montrer que u est constante.

Exercice 8 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 9 : Soit u une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + Bn$.

Exercice 10 : Déterminer les réels x tels que $\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$.

Exercice 11 : Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (f(y) - f(x))(z - y) = (f(z) - f(y))(y - x)$$

puis celles telles que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (f(y) - f(x))(z - y) = (f(z) - f(y))(x - z)$$

Exercice 12 : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}\right)\right)$$

Exercice 13 : Soient a et b deux réels et u une suite de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On suppose que $b \neq 0$.

1. On suppose que le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2. Montrer que $\exists ! (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A r_1^n + B r_2^n$.
2. On suppose que le polynôme $X^2 - aX - b$ possède une racine double r_0. Montrer que $\exists ! (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (An + B) r_0^n$.