Équivalents

Exercice 1 : Trouver la limite et un équivalent des suites de terme général

1. $u_n = n\tan(1/n)$
2. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$
3. $u_n = (1+\sin(1/n))^n$
4. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$
5. $u_n = n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right)$
6. $\displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

Exercice 2 :

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ a une seule solution. On la note u_n.
2. Déterminer la limite de la suite u.
3. Déterminer un équivalent simple de u que l'on notera v.
4. Déterminer un équivalent de $u - v$ que l'on notera w.
5. Déterminer un équivalent de $u - v - w$.

Exercice 3 : On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^3$.

1. Montrer que la suite u est positive et croissante.
2. En déduire la limite de u.
3. Soit $v = \left(\dfrac{\ln u_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Montrer que pour tout entier n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n^2}\right)$.
   En déduire la monotonie de la suite v.
   (b) Prouver que pour tout couple d'entiers (n,k),
   $$v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{3^{n+k+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)$$
   puis que pour tout couple d'entiers (n,p),
   $$v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2\times 3^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)$$
   (c) En déduire que la suite v converge. On notera ℓ sa limite.
4. Prouver que pour tout entier n, $\dfrac{e^{\ell 3^n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u_n^2}}} \leq u_n \leq e^{\ell 3^n}$.
5. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 4 :

1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente Montrer que
$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geq N,\ \forall q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$
2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $(*)$. Montrer que u converge.