Limites, équivalents et suites

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique.

1. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors elle est constante.
2. Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
3. Que dire si f est monotone sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Soit $f : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$

En quels points la fonction f admet-elle une limite ?

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble de définition, un équivalent et la limite en zéro des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{\tan x}}$.
2. $\ln(1+e^x)$
3. $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi(1+x)}{2}\right)}{x-\sqrt{x^2+2x}}$
4. $\dfrac{\tan^2 x}{1+\dfrac{1}{x^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x}}$
6. $\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}$
7. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 4 : Déterminer la limite en $1/2$ de $f : x \mapsto (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.
On pourra se ramener à la limite en 0 de $h \mapsto f(1/2+h)$.

Exercice 5 :
Déterminer l'ensemble de définition et la limite éventuelle en 1 de

1. $x \mapsto \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)\tan(2\pi x)}$.
2. $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{3x-1}}$