# Utilisations des formules de Taylor

**Exercice 1 :** Déterminer un équivalent de

1. $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{\cos x}$ en 0
2. $\dfrac{\ln(1+\cos x)-\ln 2}{\sqrt{1+x}-\cos x}$ en 0
3. $(1+\sin x)^3-\mathrm{ch}(x)$ en 0
4. $\dfrac{3x^2-2x-1}{\ln(x)}$ en 1
5. $\dfrac{\ln(1+x)-\ln 2}{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{2}}$ en 1

**Exercice 2 :**
Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^k$.

**Exercice 3 :** Méthodes des rectangles
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b f-(b-a)f(a)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2}\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}|f'(x)|$
2. En déduire que pour tout $n$, on a
$$\left|\int_a^b f-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2n}\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}|f'(x)|$$
puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f$
3. Prouver de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f$

On dit que les méthodes des rectangles à droite ou à gauche est d'ordre un.

**Exercice 4 :** Méthode du point milieu
Soit $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que :
$$\int_a^b f-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x.$$
puis que
$$\left|\int_a^b f-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{24}\underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}|f''|$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire que
$$\left|\int_a^b f-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{24n^2}\underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}|f''|$$
puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f.$
On dit que la méthode du point milieu est d'ordre deux.

**Exercice 5 :** Méthode des trapèzes
Soit $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}=\int_a^b(f-g)$
où $g\,:\,[a,b],\ x\mapsto f(a)+(x-a)(f(b)-f(a))$.
2. Soit $x\in]a,b[$.
On considère la fonction $\phi\,:\,[a,b],\ t\mapsto f(t)-g(t)-K(t-a)(t-b)$ avec $K=\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)(x-b)}$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\phi''(c)=0$ puis que
$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)(x-b)}\right|\leq\underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}|f''|$$
3. En déduire que
$$\left|\int_a^b f-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leq\frac{(b-a)^3}{12}\underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}|f''|$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire
$$\left|\int_a^b f-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2}\right|\leq\frac{(b-a)^3}{12n^2}\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}|f''(x)|$$
On dit que la méthode des trapèzes est d'ordre deux.