

Matrices

Exercice 1 : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1

1. Montrer qu'il existe $L \in M_{1,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = CL$.
On suppose désormais que $n = p$
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Prouver que $\lambda = \text{Tr}A$.

Exercice 2 :

1. Soit ϕ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \phi(M) = \text{Tr}(AM).$$
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible M telle que $\text{Tr}(J_r M) = 0$.
3. En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 + f = 0$ non nul et non bijectif.
On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Prouver que si la base (e_1, e_2, e_3) convient, alors :
$$e_1 \in \text{Ker}f, \quad (e_2, e_3) \in \text{Ker}(f^2 + Id)^2 \quad \text{et} \quad e_3 = -f(e_2).$$
2. Prouver que $\text{Ker}f$ et $\text{Ker}(f^2 + Id)$ sont en somme directe et non réduits à $\{0\}$.
3. Prouver que si e_2 est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f^2 + Id)$, alors $(e_2, f(e_2))$ est libre.
4. Conclure.

Exercice 4 :

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 5 :

1. En utilisant un endomorphisme associé, inverser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j-i+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En considérant les polynômes $P_k = (X+1)^k$, inverser la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 :

1. Prouver que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

2. Prouver que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

3. Prouver que les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r .

Prouver que $\{B \in M_n(\mathbb{K}) : ABA = 0\}$ est un \mathbb{K} -ev et déterminer sa dimension.

Exercice 8 : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

$$\begin{cases} f^2 = g^2 = Id_E \\ f \circ g + g \circ f = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que E est de dimension paire. On pose $n = 2p$.
2. Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f soit la matrice diagonale $\text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_p)$ et celle de g soit $\sum_{i=1}^p (E_{i,p+i} + E_{i+p,i})$.

Exercice 9 : Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul et non bijectif tel que $f + f^3 = 0$

1. Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Im} f$.

2. Prouver qu'il existe une base \mathcal{B} de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 :

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ et $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$. Prouver l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(I_n + \lambda E_{i,j}) = 0$.

2. En déduire que, pour $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 11 : Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $S_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12 : Soient $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale ayant des coefficients diagonaux distincts. Déterminer le noyau et l'image de $\phi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), M \mapsto DM - MD$.

Exercice 13 :

1. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (M, N) \in M_n(\mathbb{K})^2, A = MN \Rightarrow A = NM$$

Montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ $A = \lambda I_n$.

Exercice 14 : Soit E de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme

de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_1 + e_3)$ est une base de E

2. Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} f$

3. Quelle relation relie les matrices A et D .

4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n .

Exercice 15 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice par rapport à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Quelle est la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_1 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$?

Quelle est la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1, e_3, e_4, \dots, e_n)$?

2. Quels sont les endomorphismes de l'espace vectoriel E dont les matrices sont indépendantes de la base choisie?

3. Quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 16 : Dans \mathbb{R}^3 on considère s la symétrie

— par rapport au plan d'équation : $x + 2y + 3z = 0$,

— parallèlement à la droite engendrée par $(1, 1, 1)$.

1. En donner la matrice M par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer les puissances de M .

Exercice 17 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $F = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : AM = MA\}$ est un espace vectoriel.

2. On suppose que A est diagonale et que ses coefficients sont distincts. Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de F .