Produit scalaire

Exercice 1 : Soit $E=\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique

1. Déterminer l'orthogonal de $u=(0;1;1;1)$ et le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u$.
2. Déterminer l'orthogonal de $P=\text{Vect}\left((0;1;1;1),(0;1;0;1)\right)$ et le projecteur orthogonal sur P.

Exercice 2 : Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère le plan P d'équation $x+y+3z=0$.

1. Déterminer l'orthogonal de P et en donner une base.
2. Trouver une base orthonormée de P et de son orthogonal.
3. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur P puis sa matrice dans la base canonique.
4. Pour tout élément x de E, déterminer sa distance au plan P.

Exercice 3 : Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $P=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}2&3&3\\3&10&-1\\3&-1&10\end{pmatrix}$ est une projection orthogonale

Exercice 4 : Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi\,:\,E^2\to\mathbb{R},\ (f,g)\mapsto\displaystyle\int_0^1(fg+f'g')$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $V=\{f\in E\,|\,f(0)=f(1)=0\}$ et $W=\{f\in E\,|\,f''=f\}$.
   Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $E_{a,b}=\{f\in E\,|\,f(0)=a \text{ et } f(1)=b\}$.
   Déterminer $\displaystyle\inf_{f\in E_{a,b}}\int_0^1\left(f^2+f'^2\right)$.

Exercice 5 : Soit E un espace préhilbertien réel, F et G deux sev de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
2. Prouver que si E est euclidien, alors $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien et $p\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall x\in E,\ \|p(x)\|\le\|x\|$.

Exercice 7 : Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une bon de E et $p\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Prouver que p est orthogonal ssi $\forall(x,y)\in E^2,\ \langle p(x),y\rangle=\langle x,p(y)\rangle$.
2. Prouver que p est orthogonal ssi $\text{Mat}_\mathcal{B}(p)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Prouver que p est orthogonal ssi il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ et $D\in D_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{Mat}_\mathcal{B}(p)={}^tPDP$.
   Que valent alors les coefficients diagonaux de D ?

Exercice 8 :
Soit ϕ $\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R},\ (P,Q)\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\cos t)Q(\cos t)\mathrm{d}t$.

1. Prouver que ϕ est un produit scalaire.
2. Prouver qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \text{dom}P_n=1 \text{ et } \deg P_n=n.$$
3. Déterminer P_0, P_1, P_2 puis la parité de P_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$, prouver que $P_{n+2}-XP_{n+1}\in\mathbb{R}P_n$.
5. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

Exercice 9 : Calculer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^1\left(t^3-at^2-bt-c\right)2\mathrm{d}t,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

Exercice 10 : Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$.

1. Prouver qu'il existe une unique $u^*\in\mathcal{L}(E)$ tel que
   $$\forall(x,y)\in E^2,\ (u(x),y)=(x,u^*(y)).$$
2. Soit $\mathcal{B}$ une bon de E. Trouver une relation entre $\text{Mat}_\mathcal{B}(u)$ et $\text{Mat}_\mathcal{B}(u^*)$.
3. Soit F un sev de E. Prouver que F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u^*.
4. Prouver que $\text{Ker}(u^*)=(\text{Im}u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*)=(\text{Ker}u)^\perp$.
5. Prouver que $\text{Ker}(u^*\circ u)=\text{Ker}u$ et $\text{Im}(u\circ u^*)=\text{Im}u$.