Nombres complexes et trigonométrie

I. Nombres complexes

Définition. *On définit l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des* nombres complexes *comme l'ensemble des éléments de* $\mathbb{R}^2$*, muni de l'addition usuelle sur* $\mathbb{R}^2$ *i.e.*

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad (a,b)+(c,d) = (a+b, c+d)$$

L'élément $(0,1)$ *est noté* i*, l'élément* (a,b) *est noté* $a+ib$*.*

Si l'on considère un nombre complexe $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on dit que a est la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z. On note

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

En se fixant un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on identifie $\mathbb{C}$ et le plan usuel.
À un point M (respectivement à un vecteur $\overrightarrow{u}$) de coordonnées (x,y) dans le repère, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ (respectivement $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$), on associe le nombre complexe $z = x+iy$. On dit alors que z est l'affixe de M (respectivement l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$) et que M est l'image du nombre complexe z. On note alors $M(z)$.

Définition. *Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté* $i\mathbb{R}$ *car il est constitué des éléments de la forme* ib*,* $b \in \mathbb{R}$*.*

Définition. *On définit sur* $\mathbb{C}$ *une multiplication* $\times$ *par*

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad (a+ib)\times(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

En particulier, on retrouve que $i^2 = -1$.
Muni des lois usuelles $+$ et $\times$, l'ensemble $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, notion détaillée plus tard et qui peut être ignorée lors d'une première lecture.

Proposition. *Soit* $(z,z') \in \mathbb{C}^2$*, on a*

$$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathit{Ré}(z') \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$$

$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z') \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')$$

Définition. *Soit* $z = a+ib$ *un nombre complexe, on note* $\bar{z}$ *le nombre complexe conjugué de* z*, défini par*

$$\overline{z} = a - ib$$

Dans le plan complexe, la conjugaison associe à un point d'affixe z le point d'affixe $\overline{z}$ qui est obtenu par symétrie par rapport à l'axe des réels.

Proposition. *Pour tout nombre complexe z, on a*

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad et \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Par conséquent,

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z} \qquad et \qquad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$

Un nombre complexe est réel si et seulement si le point d'affixe z appartient à la droite $(O, \vec{i})$ (aussi appelée droite réelle). Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si le point d'affixe z appartient à la droite $(O, \vec{j})$.

Proposition. *L'opération de conjugaison d'un nombre complexe possède les propriétés suivantes, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:*

$$\begin{aligned}
\textit{(Involutivité)} &\quad \overline{\overline{z}} = z \\
\textit{(Compatibilité avec l'addition)} &\quad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\
\textit{(Compatibilité avec la multiplication)} &\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \\
\textit{(Compatibilité avec l'inversion)} &\quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad si \quad z \neq 0
\end{aligned}$$

II. Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Le nombre $z\overline{z} = a^2 + b^2$ est un réel positif, ce qui justifie la définition suivante.

Définition. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On note $|z|$ le réel positif appelé module de z défini par*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque. *La notation du module d'un nombre complexe coïncide avec la valeur absolue d'un nombre réel : si z est réel, alors son module n'est autre que sa valeur absolue. Il n'y a donc pas de conflit dans les notation, le module étend la valeur absolue des nombres réels à l'ensemble des nombres complexes.*

Proposition. *Pour tout nombre complexe non nul z, on a*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Remarque. *Soit M un point d'affixe z, le module $|z|$ représente la distance entre l'origine O et le point M. A ce stade, on a besoin que le repère qui permet d'identifier le plan à $\mathbb{C}$ soit orthonormé. De même, si $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z - z_0|$ représente la distance entre les images de z et z_0 dans le plan.*

Proposition. *Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan et $r > 0$ alors*

1. *Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) : |z - \omega| = r\}$.*
2. *Le disque fermé de centre Ω et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) : |z - \omega| \leq r\}$.*
3. *Le disque ouvert de centre Ω et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) : |z - \omega| < r\}$.*

Proposition. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, le module présente les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
\textit{(Compatibilité avec la conjugaison)} &\quad |\overline{z}| = |z| \\
\textit{(Compatibilité avec la multiplication)} &\quad |zz'| = |z||z'| \\
\textit{(Compatibilité avec l'inversion)} &\quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}
\end{aligned}$$

Proposition. *(*) Soit z un nombre complexe. On a :*

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad &&\textit{avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}\\
&\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leq |z| \quad &&\textit{avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+\\
&\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \quad &&\textit{avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}\\
&\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \leq |z| \quad &&\textit{avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Proposition. *(*) Soit (z, z') deux nombres complexes*

$$\begin{aligned}
\textit{(Inégalité triangulaire)} \quad & |z + z'| \leq |z| + |z'|\\
\textit{(Inégalité triangulaire inversée)} \quad & \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|\\
\textit{(Égalité du parallélogramme)} \quad & \left|z + z'\right|^2 + \left|z - z'\right|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)
\end{aligned}$$

Remarque. *Géométriquement, l'inégalité triangulaire signifie que le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite. En effet, soit A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c alors $AB = |b - a| \leq |b - c| + |c - a| = AC + CB$.*
L'inégalité triangulaire inversée traduit le fait que si deux points d'affixe z et z' sont séparés d'une distance $d = |z - z'|$, alors la distance entre leur module est plus petite que d.
L'égalité du parallélogramme traduit le fait que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Proposition. *(*) Soit (z, z') deux nombres complexes alors*

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ :\ z' = \lambda z \\ \textit{ou} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ :\ z = \lambda z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \textit{ou} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \ :\ z' = \lambda z \end{cases}$$

On dit que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si z et z sont positivement liés.

III. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

On admet connues les propriétés usuelles des fonctions cosinus et sinus suivantes :

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques. La fonction cosinus réalise une bijection entre $[0, \pi]$ et $[-1, 1]$ tandis que la fonction sinus réalise une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et $[-1, 1]$. Elles vérifient,*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

De plus, pour tous réels a et b, on a

$$\textit{(*)} \begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

En particulier, pour tout réel θ, on a

$$\textit{(*)} \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \, \cos \theta \end{cases}$$

Proposition. *Soit* $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$. *On a*

$$\cos\theta=\cos\theta' \Leftrightarrow \begin{cases}\theta'\equiv\theta\ [2\pi]\\ ou\\ \theta'\equiv-\theta\ [2\pi]\end{cases} \quad et \quad \sin\theta=\sin\theta' \Leftrightarrow \begin{cases}\theta'\equiv\theta\ [2\pi]\\ ou\\ \theta'\equiv\pi-\theta\ [2\pi]\end{cases}$$

En particulier, $\begin{cases}\cos\theta'=\cos\theta'\\ \quad et\\ \sin\theta'=\sin\theta'\end{cases} \Leftrightarrow \theta\equiv\theta'\ [2\pi].$

Définition. *On note* $\mathbb{U}$ *l'ensemble des nombres complexes de module* 1.
L'image de $\mathbb{U}$ *n'est autre que le cercle de centre O et de rayon 1 appelé cercle trigonométrique.*

Proposition. *(*) Soit* $z\in\mathbb{U}$. *Il existe un réel* θ, *unique modulo* 2π, *tel que*

$$z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

Définition. *Pour tout réel* $\theta\in\mathbb{R}$, *on note* $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

Remarque. *D'après ce qui précède, l'application* $\mathbb{R}\to\mathbb{U}$, $\theta\mapsto e^{i\theta}$ *est surjective et* 2π*-périodique. Sa restriction à* $[0,2\pi[$ *(ou tout intervalle de la forme* $[a,a+2\pi[$, $a\in\mathbb{R}$*) est bijective.*

Proposition. $e^{i0}=1$, $e^{i\pi/6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$, $e^{i\pi/4}=\dfrac{1+i}{2}$, $e^{i\pi/3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $i=e^{i\pi/2}$ *et* $-1=e^{i\pi}$.

Remarque. *En particulier,* $-1=e^{i\pi}$. *Cette dernière égalité est connue sous le nom d'identité d'Euler sous la forme*

$$e^{i\pi}+1=0$$

et qualifiée par Richard Feynman de "formule la plus remarquable au monde" puisqu'elle contient cinq des symboles fondamentaux des mathématiques.

Proposition. *(*) Pour tout couples de réels* (θ,ϕ), *on a*

$$e^{i(\theta+\phi)}=e^{i\theta}\,e^{i\phi} \quad et \quad e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}=\overline{e^{i\theta}}$$

Corollaire. *Formules d'Euler :*

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Corollaire. *Formule de Moivre :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Grâce à la notation $e^{i\theta}$, nous disposons d'une paramétrisation du cercle trigonométrique.

$$\mathcal{C}=\{M(z),\ z\in\mathbb{U}\}=\{M\left(e^{i\theta}\right),\ \theta\in\mathbb{R}\}=\{M\left(e^{i\theta}\right),\ \theta\in[0,2\pi[\}$$

Nous allons en donner un autre, dite rationnelle à l'aide de la fonction tangente que nous allons introduire.

Définition. *(*) On définit la fonction tangente sur* $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ *par*

$$\forall x\in D,\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

Proposition. *La fonction tangente est π-périodique et impaire i.e.*

$$\forall x \in D, \quad \tan(x+\pi) = \tan x \quad et \quad \tan(-x) = -\tan x$$

Enfin, la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et vérifie*

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

Nous admettrons qu'elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Proposition. $\forall (\theta, \theta') \in D_{\tan}^2, \quad \tan\theta = \tan\theta' \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[\pi]$.

Remarque. *Pour* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *le réel* $\tan\theta$ *n'est autre que la pente de la droite reliant l'origine au point de coordonnées* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *i.e. d'affixe* $e^{i\theta}$.

Proposition. *(*) Pour tous réels a et b appartenant à D tels que $a+b$ appartienne à D, on a*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Pour tous réels a et b appartenant à D tels que $a-b$ appartienne à D, on a

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Proposition. *(*) Pour tout réel* $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$ *i.e.* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, *on peut définir* $t = \tan(\theta/2)$. *On a alors*

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \textit{et si, de plus, } \theta \not\equiv \pi/2[\pi], \textit{ alors } \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Proposition. *(*) L'ensemble* $\left\{ M\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$ *est égal au cercle trigonométrique privé du point d'affixe* -1.

IV. Forme trigonométrique

1.Argument d'un nombre complexe.

Proposition. *Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que*

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique (ou polaire) de z.
On appelle argument de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Deux arguments d'un même nombre complexe diffèrent d'un multiple de 2π.
On appelle argument principal de z l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Remarque. *Géométriquement, l'argument d'un nombre complexe non nul z d'image M est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur unitaire de l'axe des abscisses $\overrightarrow{i}$. Ainsi, l'argument du complexe conjugué de z, dont l'image s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, est bien l'opposé de l'argument de z. On comprend aussi que l'argument d'un nombre complexe soit défini modulo 2π.*

Remarque. *Pour mettre un nombre complexe non nul de la forme $a+ib$ sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$, on pose $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ et on résout*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

mais on ne connait pas toujours une solution simple de ce système.

Proposition. *Soit z et z' deux complexes non nuls admettant θ et θ' comme arguments. Alors les complexes $\bar{z}$, $1/z$ ont pour argument $-\theta$ et le complexe zz' a pour argument $\theta+\theta'$.*

Remarque. *Attention lors de la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel, si z admet θ comme argument alors $2z$ admet 2θ comme argument et $-2z$ admet $\pi+\theta$ comme argument.*

Corollaire. *(*) Soient trois points distincts du plan A, B et C d'affixes a, b et c. L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'argument du nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$ mais aussi du nombre complexe $(c-a)\,\overline{b-a}$.*

Corollaire. *(*) Soient trois points du plan A, B et C d'affixes a, b et c. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $(c-a)\,\overline{b-a} \in \mathbb{R}$*

Corollaire. *(*) Soient quatre points du plan A, B, C et D d'affixes a, b, c et d tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.*
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $(d-c)\,\overline{b-a} \in \mathbb{R}$.
Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $(d-c)\,\overline{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Proposition. *(*) Soit a et b deux réels. Soit $\rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de $a+ib$ alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = \rho\cos(t-\theta)$$

2. Factorisation par l'angle moitié

Proposition. *(*) Soit θ un réel alors*

$$1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2} \times 2\cos(\theta/2)$$

En particulier, si $\cos(\theta/2)$ est positif (resp. négatif) alors $1+e^{i\theta}$ admet $\theta/2$ (resp $\theta/2+\pi$) comme argument. De même,

$$1-e^{i\theta} = e^{i\theta/2} \times (-2i\sin(\theta/2))$$

donc si $\sin(\theta/2)$ est positif (resp. négatif) alors $1-e^{i\theta}$ admet $\theta/2-\pi/2$ (resp $\theta/2+\pi/2$) comme argument.

Exercice. *Soient θ et ϕ deux nombres réels. Quel est l'argument de $e^{i\theta}+e^{i\phi}$?*

A l'aide de cette méthode, on peut retrouver les formules trigonométriques suivantes :

Proposition. *(*) Pour tous réels a et b, on a*

$$\begin{cases} \cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\,\cos\dfrac{a+b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a-b}{2}\,\sin\dfrac{a+b}{2} \\ \sin a + \sin b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\,\sin\dfrac{a+b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\,\sin\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Exercice. *(*) Soit θ un réel. Prouver que*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((n+1)x/2\right)\cos(nx/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

Exercice. *(*) Soit n un entier naturel et x un réel, calculer :*

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \text{ (Noyau de Dirichlet)} \quad \text{et} \quad F_n = \sum_{k=0}^{n} D_k \text{ (Noyau de Féjer)}$$

V. Exponentielle complexe

Définition. *On définit l'exponentielle complexe d'un nombre complexe $z = x + iy$ par*

$$e^z = e^x e^{iy}$$

On prolonge ainsi la définition de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

Proposition. *L'exponentielle complexe est un morphisme i.e.*

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Proposition. *Pour tout complexe z, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z}$ et e^z admet comme argument* $\mathrm{Im}z$.

Corollaire. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Proposition. *Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ alors l'équation $e^z = a$ a une infinité de solutions :*

$$\mathcal{S} = \{\ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

VI. Racines n-ièmes

1. Racines n-ièmes de l'unité

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^n = 1$ pour $n > 0$ admet deux solutions qui sont ± 1 si n est pair, ou bien une seule $x = 1$ si n est impair. Cette séparation montre que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas le bon cadre pour résoudre cette équation. Dans $\mathbb{C}$, le résultat est uniforme comme le montre la proposition suivante :

Proposition. *(*) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions données par*

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

Les nombres complexes ω_k sont appelées racines n-ième de l'unité.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.*

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{U}_n = \{\omega^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$, où $\omega = e^{2i\pi/n}$.*

Remarque. *Les racines 3-ièmes de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \bar{j}$.*

Proposition. *(*) Soit $n \geq 3$. Les images dans le plan des racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de longueur* $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

2. Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Proposition. *(*) Soit z_0 un nombre complexe non nul. L'équation $z^n = z_0$ admet n solutions distinctes données par*

$$|z_0|^{1/n} e^{i\theta_0/n} e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

où θ_0 est un argument de z_0. On les appelle racines n-ièmes de z_0.

Proposition. *Soit z_0 un nombre complexe non nul et $n \geq 3$. Les images dans le plan des racines n-ièmes de z_0 sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés de longueur $2|z_0|^{1/n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.*

3. Équation du second degré

Proposition. *(*) Soit $a \neq 0$, b et c trois nombres complexes. L'équation polynomiale du second degré $az^2 + bz + c = 0$ admet comme solution dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes*

$$\frac{-b \pm \delta}{2a}$$

où δ est une racine carré du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.
Le complexe Δ est appelé le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. S'il est nul, l'équation n'a qu'une solution $-b/2a$ sinon elle en a deux z_1 et z_2 reliées par les relations :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 z_2 = c/a \end{cases}$$

Proposition. *Soient a, b et c trois complexes tels que $a \neq 0$.*
Deux complexes z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 z_2 = c/a \end{cases}$$

VII. Géométrie

1. Similitudes planes

Nous allons utiliser les complexes pour traduire les transformations classiques du plan : translations, homothétie, rotation, symétrie...

Définition. *On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application du plan qui transforme tout point M du plan en l'unique point M' définit par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.*

Définition. *On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application du plan qui transforme tout point M du plan en l'unique point M' définit par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.*

Définition. *On appelle homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \neq 0$ l'application du plan qui transforme tout point M du plan en l'unique point M' définit par $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.*

Proposition. *(*) La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe u transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe $z + u$.*
La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe $\omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \neq 0$ transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe $\omega + \lambda(z - \omega)$.

Proposition. *(*) Réciproquement, soient a et b deux nombres complexes tels que a soit non nul et d'argument θ. La transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az + b$ est*

- *une translation si $a = 1$*
- *la composée de la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle θ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. Ces deux transformations commutent.*

Une telle transformation est appelée similitude plane directe.

Proposition. *(*) Une similitude plane directe de la forme $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, multiple les longueur par $k = |a|$ et conserve les angles orientés. Ainsi, si A, B et C ont pour image les points A', B' et C', alors*

$$A'B' = kAB \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$$

2. Utilisation des complexes en géométrie

Les nombres complexes permettent de retrouver ou de prouver certains résultats géométriques

Proposition. *(*) Soit A et B deux points diamétralement opposés d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Soit M un point distinct de A et B. On a l'équivalence suivante :*

$$M \in \mathcal{C} \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi].$$

Proposition. *(*) Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Soit M un point distinct de A et B. On a l'équivalence suivante :*

$$M \in \mathcal{C} \iff (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \ [2\pi].$$

VIII. Méthodes de calcul

1. Linéarisation (*)

Linéariser, c'est écrire $\cos^n(\theta)$ en fonction des $\cos(k\theta)$ pour $k \leq n$. Cela est utile pour le calcul de primitives ou d'intégrales par exemple. Pour cela, on utilise la formule de Moivre et le binôme de Newton. Prenons par exemple $\cos^6(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos^6(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} + 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} + 20 + 15e^{2i\theta} + 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{32}\big(\cos(6\theta) + 6\cos(4\theta) + 15\cos(2\theta) + 20\big)
\end{aligned} \tag{1}$$

Remarquez que les exponentielles se combinent deux à deux pour former les cosinus. Si l'on développe un sinus comme $\sin^6(\theta)$, on obtient des sinus et des cosinus.

2. Polynômes de Tchebychev

Le problème "inverse", c'est-à-dire l'écriture de $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ se résout à l'aide de la formule de Moivre. Cette opération permet d'obtenir de jolies écritures de cosinus et de sinus en fonction de radicaux. Prenons pour exemple $\cos(5\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^5 \\
&= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\
&= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + 5\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta))^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Si on pose $\theta = \pi/10$, alors $\cos(5\theta) = 0$ et $x = \cos(\theta)$ vérifie $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
Comme $x \neq 0$, x^2 est racine du polynôme $16X^2 - 20X + 5$, i.e. $\cos^2(\pi/10) \in \left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8} \right\}$.
On obtient donc une expression des cosinus en fonction de radicaux en tenant compte de la décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$:

$$\cos(\pi/10) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ et } \cos(3\pi/10) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

(*) Il faut savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Théorème. *(*) Pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Pour tout entier n non nul, le polynôme P_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}, de même parité que n et il admet n racines distinctes $(x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ définies par

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Théorème. *(*) La famille des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée par la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

On retrouve que, pour tout entier n non nul, le polynôme P_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et de même parité que n.

Remarque. *On a $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 4X$, $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$...*

3. Utilisation des racines n-ièmes de l'unité (*)

Les nombres complexes permettent aussi de calculer des sommes portant sur les coefficients binomiaux. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités suivantes sont une conséquence de la formule du binôme de Newton :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

On en déduit

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

Dans ce qui précède, 1 et -1 sont les deux racines carrés de l'unité. On peut de même calculer les sommes suivantes :

$$S_0 = \sum_{k=0, k\equiv 0 \mod 3}^{n} \binom{n}{k} \quad S_1 = \sum_{k=0, k\equiv 1 \mod 3}^{n} \binom{n}{k} \quad S_2 = \sum_{k=0, k\equiv 2 \mod 3}^{n} \binom{n}{k}$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{cases} (1+1)^n = S_0 + S_1 + S_2 \\ (1+j)^n = S_0 + jS_1 + j^2S_2 \\ (1+j^2)^n = S_0 + j^2S_1 + jS_2 \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{cases} 3S_0 = 2^n + 2\cos(n\pi/3) \\ 3S_1 = 2^n + 2\cos((n-2)\pi/3) \\ 3S_2 = 2^n + 2\cos((n+2)\pi/3) \end{cases}$$