

Ensembles et applications

I. Ensembles

1. Généralités

La notion d'ensemble est une notion intuitive : c'est une collection d'objets appelés éléments. Par exemple, l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels et l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

Lorsqu'un élément x appartient à un ensemble E , on note $x \in E$.

La négation $\overline{x \in E}$ se note $x \notin E$.

Remarque. Il y a plusieurs façons de définir un ensemble :

- de manière descriptive : $A = \{0, 1, 2\}$
- de manière conditionnelle : $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2\}$

Définition. On dit qu'un ensemble F est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble E si tout élément de F est aussi élément de E . On dit aussi que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, x \in E$$

Par exemple, on a la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles, on a

- $\emptyset \subset E$.
- $E \subset E$, ce qui signifie que l'inclusion est réflexive.
- $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \Rightarrow (E \subset G)$, ce qui signifie que l'inclusion est transitive

Définition. Deux ensembles E et F sont dits égaux et on note $E = F$ si E est inclus dans F et F est inclus dans E .

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E) \wedge (E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E) \wedge (\forall x \in E, x \in F)$$

Remarque. On a toujours $E = E$. La relation " $=$ " est réflexive.

En pratique, pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on procède ainsi par double inclusion. On commence par supposer que $x \in F$ et on montre que $x \in E$ ce qui montre la première inclusion $F \subset E$ puis on montre l'inclusion réciproque $E \subset F$ de la même manière.

Proposition. Si A et B sont deux parties de E , alors on a l'équivalence

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Définition. L'ensemble des parties d'un ensemble E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$F \subset E \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$$

Proposition. Soient E et F deux ensembles, on a alors

$$\begin{aligned} E &\in \mathcal{P}(E), & \emptyset &\in \mathcal{P}(E) \\ a \in E &\Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E) \\ E \subset F &\Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F) \end{aligned}$$

2. Opérations sur les ensembles

Définition. On appelle *intersection* de deux ensembles E et F et on note $E \cap F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à E et à F .

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \in F)$$

On dit que deux ensembles E et F sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide. On dit qu'ils *s'intersectent* ou qu'ils *ont une intersection non vide* sinon.

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles, on a alors

$$\begin{aligned} E \cap \emptyset &= \emptyset & E \cap E &= E \\ E \cap F &= F \cap E & \text{(La loi } \cap \text{ est commutative)} \\ (E \cap F) \cap G &= E \cap (F \cap G) & \text{(La loi } \cap \text{ est associative)} \end{aligned}$$

L'associativité de la loi \cap autorise à noter $E \cap F \cap G$ l'ensemble $(E \cap F) \cap G$ puisque la position des parenthèses n'a aucune importance.

Proposition. Soient E et F deux ensembles, on a alors

$$\begin{aligned} F \subset E &\Leftrightarrow E \cap F = F \\ \mathcal{P}(E \cap F) &= \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \end{aligned}$$

Définition. On appelle *réunion* de deux ensembles E et F et on note $E \cup F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à E ou bien à F .

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \vee (x \in F)$$

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles, on a alors

$$\begin{aligned} E \cup \emptyset &= E & E \cup E &= E \\ E \cup F &= F \cup E & \text{(La loi } \cup \text{ est commutative)} \\ (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G) & \text{(La loi } \cup \text{ est associative)} \end{aligned}$$

De même que pour l'intersection, on note $E \cup F \cup G$ l'ensemble $(E \cup F) \cup G$ puisque la position des parenthèses n'a aucune importance.

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles, on a alors

$$\begin{aligned} F \subset E &\Leftrightarrow E \cup F = E \\ \mathcal{P}(E \cup F) &\supset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \end{aligned}$$

Exercice. Soient E et F deux ensembles.

On a $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ si, et seulement si, $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Proposition. Soient E , F et G trois ensembles, on a alors

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

On dit que la loi \cup est distributive par rapport à la loi \cap et inversement.

Définition. Soit F une partie d'un ensemble E . On appelle complémentaire de F dans E et on note $C_E F$ ou $E \setminus F$ (ou bien \bar{F} s'il n'existe pas d'ambiguïté sur l'ensemble E) l'ensemble constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à F .

$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin F)$$

Proposition. Soient A et B deux parties de E , on a alors

$$\bar{\emptyset} = E \quad \bar{E} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$\bar{A} = B \Leftrightarrow \bar{B} = A$$

$$A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Définition. Plus généralement, si A et B sont deux ensembles, on note $A \setminus B$ l'ensemble formé des éléments de A n'appartenant pas à B .

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Définition. Soient E et F deux ensembles.

On appelle produit cartésien de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble formé des couples d'éléments dont le premier est dans E et le deuxième dans F . Ainsi, on a :

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in F)$$

Proposition. Soient A , A' , B , B' et C des parties de E , on a alors

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$$(A \subset A') \wedge (B \subset B') \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$$

Exercice. Soient A , B , C et D des ensembles. Montrer

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

Définition. On généralise l'intersection et la réunion de deux ensembles de la manière suivante : soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, une famille (non nécessairement finie) de parties de E . On appelle intersection et réunion des éléments de \mathcal{F} les ensembles :

$$\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E : \forall X \in \mathcal{F}, x \in X\}$$

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E, \exists X \in \mathcal{F} : x \in X\}$$

On dit que \mathcal{F} est un recouvrement de E si $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = E$.

Remarquons que lorsque la famille \mathcal{F} ne contient que deux parties de E , on retrouve la définition de l'intersection et de la réunion présentée ci-dessus.

Définition. Soit \mathcal{F} un recouvrement de E . On dit que \mathcal{F} est une partition de E si ses éléments sont non vides et deux à deux disjoints, c'est à dire

$$\forall (X, X') \in \mathcal{F}^2, X \neq X' \Rightarrow X \cap X' = \emptyset$$

II. Applications

1. Injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application

Définition. Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F est la donnée d'une partie G_f de $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E , l'ensemble $\{y \in F : (x, y) \in G_f\}$ contienne exactement un élément.

On dit que E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée et G_f est le graphe de l'application f .

Pour tout élément x de E , l'unique élément de l'ensemble $\{y \in F : (x, y) \in G_f\}$ est appelé image de x par f et on le note $f(x)$.

Pour dire que f est une application de E dans F qui à tout élément x de E associe l'image $f(x)$, on notera $f : E \rightarrow F, x \mapsto f(x)$

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Définition. Soit $f \in F^E$ et $y \in F$. On appelle antécédent de y tout élément x de E tel que $y = f(x)$.

Exemple. On définit l'application identité de E notée Id_E par

$$Id_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$$

Soit a un élément de F , l'application constante à a associe à tout élément de E l'élément a .

Remarque.

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$ tel que $y^2 = x$ n'est pas une application.

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto y$ tel que $y^2 = x$ est une application.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$ n'est pas une application

Définition. Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est injective (ou que f est une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent par f , ce qui s'écrit

$$\forall (x, x') \in E^2 : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou encore, par contraposée

$$\forall (x, x') \in E^2 : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Définition. Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) si tout élément de F admet au moins un antécédent par f .

Définition. Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) si tout élément de F admet exactement un antécédent par f . Une application est donc bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque. Si $f \in F^E$ est bijective alors on peut définir l'application

$$F \rightarrow E, y \mapsto \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Définition. On appelle suite d'élément de E tout élément de l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$. Si on appelle u une suite de E , il est habituel de noter u_n l'image de l'entier n au lieu de $u(n)$.

2. Composition d'applications

Définition. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On appelle composée de f et g l'application de E dans G notée $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : E \rightarrow G, x \mapsto g(f(x))$$

Proposition. Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. On a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
On dit que la composition est associative et l'on note $h \circ g \circ f$.

Proposition. (*) La composée de deux injections est une injection.

Proposition. (*) Si $g \circ f$ est une injection, alors f est une injection.

Proposition. (*) La composée de deux surjections est une surjection.

Proposition. (*) Si $g \circ f$ est une surjection, alors g est une surjection.

Proposition. La composée de deux bijections est une bijection.

Proposition. Soit $f \in F^E$, on a $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$

Définition. Soit $f \in E^E$.

On dit que f est une involution si $f \circ f = Id$. On dit que f est idempotente si $f \circ f = f$.

Définition. Soit $f \in F^E$. On dit que f est inversible s'il existe une application $g \in E^F$, appelée inverse de f qui vérifie

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F$$

Proposition. Soit $f \in F^E$ inversible. Alors l'inverse de f est unique. On le note f^{-1} .

Proposition. (*) Une application $f \in F^E$ est bijective si et seulement si elle est inversible. Dans ce cas, l'inverse f^{-1} associe à tout élément de F son unique antécédent par f .

Corollaire. Soit $f \in F^E$ bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque. L'application $Bij(E, E) \rightarrow Bij(E, E)$, $f \mapsto f^{-1}$ est donc une involution.

Proposition. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Restrictions, prolongements et fonctions indicatrices

Définition. Soit A une partie de E . On appelle fonction indicatrice de l'ensemble A , notée $\mathbb{1}_A$ allant de l'ensemble E dans l'ensemble $\{0, 1\}$ et telle que

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On remarque que l'on définit bien là une application car tout élément de E appartient soit à A , soit à son complémentaire et jamais aux deux à la fois.

Proposition. Soient A et B deux parties de E alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\bar{A}} &= 1 - \mathbb{1}_A \\ \mathbb{1}_{A \cap B} &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{A \cup B} &= \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_A &= \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

Définition. Soit A une partie de E et f une application de E dans F .

On appelle restriction de F à A et on note $f|_A$, l'application de A dans F définie par

$$\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$$

Définition. Soient $f \in F^E$ et $g \in F^{E'}$ avec $E \subset E'$.

On dit que l'application g est un prolongement de f à E' si $f = g|_E$.

Définition. Soient $f \in E^E$ et A une partie de E . On dit que la partie A est stable par f si l'image de tout élément de A reste dans A . Dans ce cas, l'application g définie par

$$g : A \rightarrow A, x \mapsto f(x)$$

est appelée application induite par f sur A .

Attention, l'application induite n'est pas qu'une restriction. L'ensemble d'arrivée change aussi. C'est pourquoi on ne parle d'application induite que sur une partie stable alors que l'on peut restreindre une application à n'importe quelle partie de l'ensemble de départ.

4. Image directe et réciproque d'une partie par une application

Définition. Soit $f \in F^E$ et A une partie de E . On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ la partie de F définie par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

On peut ainsi parler de $f(x)$ (image d'un élément de E par l'application f) qui est un élément de F , mais aussi de $f(A)$ (image d'une partie de E), qui est une partie de F . On a alors $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Si $f \in E^E$ et $A \subset E$, alors A est stable par f si, et seulement si, $f(A) \subset A$.

Proposition. (*) Soient A et B , deux parties de E et $f \in F^E$. On a alors

$$\begin{aligned} f(A) = \emptyset &\Leftrightarrow A = \emptyset \\ A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \\ f(E) \setminus f(A) &\subset f(\overline{A}) \end{aligned}$$

Remarque. L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ peut être stricte.

Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$

Si f est injective, c'est une égalité.

Remarque. L'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$ peut être stricte.

Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$.

Si f est injective, c'est une égalité.

Exercice. (*) Soit $f \in F^E$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Définition. Soit $f \in F^E$ et B une partie de F . On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

Remarque. Par conséquent,

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

On peut donc parler de l'image réciproque de n'importe quelle partie de F , sans supposer que f est inversible.

Remarque. Si $f \in F^E$ est bijective alors

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$$

car, pour tout $x \in E$, $x \in (f^{-1})(B) \Leftrightarrow \exists y \in B : x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) \in B$

La dernière équivalence étant due au fait que x n'a qu'un antécédent par $f^{-1} : f(x)$.

Remarque. Si B est le singleton $\{y\}$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents de B . Elle peut être vide si y n'a pas d'antécédent par f , ou bien contenir un ou plusieurs éléments.

Proposition. (*) Soient A et B , deux parties de F et $f \in F^E$. On a alors

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(\overline{A}) &= \overline{f^{-1}(A)} \end{aligned}$$

Remarque. L'implication $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ peut ne pas être une équivalence.

Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}^{-*}$ et $B = \{1\}$

Proposition. (*) Soit $f \in F^E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice. (*) Soit $f \in F^E$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$$

Proposition. (*) Soit $f \in F^E$ et $A \in \mathcal{P}(F)$. On a $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Plus précisément, $f(f^{-1}(A)) = f(E) \cap A$.

Exercice. (*) Soit $f \in F^E$. Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(A)) = A$$

III. Relations dans un ensemble

1. Définition et premiers exemples

Définition. Soit E un ensemble. Une relation \mathcal{R} sur E est une partie de $E \times E$. On dit que deux éléments x et y de E sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Exemple. \leq définit une relation sur \mathbb{R} . La divisibilité définit une relation sur \mathbb{N} et l'inclusion définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation \mathcal{R} sur E .

On dit que \mathcal{R} est réflexive si : $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$

On dit que \mathcal{R} est symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$

On dit que \mathcal{R} est antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

On dit que \mathcal{R} est transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3 : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Exemple. Si on considère l'ensemble des droites du plan. On définit une relation \mathcal{R} par $D_1\mathcal{R}D_2$ si les droites D_1 et D_2 sont orthogonales. La relation \mathcal{R} n'est ni réflexive, ni transitive, ni antisymétrique, mais elle est symétrique. La relation \leq sur \mathbb{R} est réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique. Il en est de même de l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$. La relation sur \mathbb{N} définie par $n\mathcal{R}m$ si n et m ont la même parité est réflexive, symétrique et transitive, mais pas antisymétrique.

2. Relations d'ordre

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation \mathcal{R} sur E . On dit que \mathcal{R} est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit que l'ensemble E est ordonné lorsqu'il est muni d'une relation d'ordre.

Exemple. La relation \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \leq . On dit que l'ordre est total (ou que E est totalement ordonné) si

$$\forall (x, y) \in E^2 : (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel et deux éléments x et y qui vérifie la proposition ci-dessus sont dits comparables.

Exemple. L'ordre \leq est total sur \mathbb{R} . La divisibilité muni \mathbb{N} d'un ordre partiel pour lequel 2 et 4 sont comparables, mais pas 2 et 3.

3. Relations d'équivalence

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation \mathcal{R} sur E . On dit que \mathcal{R} est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple. La congruence modulo n définie sur l'ensemble \mathbb{Z} par $x \mathcal{R} y$ si $n \mid (x - y)$ est une relation d'équivalence.

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} . On définit la classe d'un élément $x \in E$ et on note $Cl(x)$ ou \bar{x} l'ensemble des éléments de E en relation avec x .

On appelle classe d'équivalence tout ensemble de la forme $Cl(x)$ avec $x \in E$.

On dit d'un élément d'une classe d'équivalence qu'il est un représentant de cette classe.

Proposition. (*) Soit A une classe d'équivalence, alors

$$\forall x \in A, A = Cl(x)$$

Proposition. (*) Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} . On a alors

$$\forall x \in E, x \in Cl(x)$$

$$\forall (x, y) \in E^2 : Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset \Rightarrow Cl(x) = Cl(y)$$

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E .

Exercice. (*) Soit f une application de E dans F .

Montrer que la relation sur E définie par

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si} \quad f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.

Prouver que la classe d'un élément $x \in E$ est $f^{-1}(\{f(x)\})$.

En déduire que les classes d'équivalences sont les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in f(E)$.