

Applications linéaires

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E , F et G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

I. Définitions et premières propriétés

Définition. Une application f de E dans F est dite linéaire si

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

ce qui est équivalent à :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemple. $I : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \int_a^b f.$

Exemple. $\phi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}), f \mapsto af'' + bf' + cf$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

Définition. Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.

On note $\mathcal{L}(E)$ plutôt que $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.

Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Définition. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F .

Exemple. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires, alors le plan $P = \text{Vect}(u, v)$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes car $\mathbb{R}^2 \rightarrow P, (\lambda, \mu) \mapsto \lambda u + \mu v$ est une application linéaire bijective.

Exemple. $\mathbb{R}^2$ et $S = \{f \in \mathcal{C}^2 : f'' = af' + bf\}$ sont isomorphes car $S \rightarrow \mathbb{R}^2, f \mapsto (f(1), f'(1))$ est une application linéaire bijective d'après le théorème de Cauchy.

Définition. On appelle homothétie toute application linéaire de la forme λId_E avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

$$f(0_E) = 0_F \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$$

Proposition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Proposition. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

Proposition. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ alors

$$\forall (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1 g_1 \circ f + \lambda_2 g_2 \circ f$$

et

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 g \circ f_1 + \lambda_2 g \circ f_2$$

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

II. Structures

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Théorème. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau

Corollaire. L'ensemble des automorphismes de E noté $GL(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Corollaire. (Binôme de Newton et formule de Bernoulli)

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ alors pour tout entier n ,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \quad \text{et} \quad f^n - g^n = (f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$$

où pour tout entier k , f^k représente Id_E si $k = 0$ et $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ sinon.

III. Applications linéaires et espaces vectoriels

Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si H est un sous-espace vectoriel de E alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F ,
- Si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle image de f et on note $\text{Im} f$ le sous-espace vectoriel de F , $f(E)$.

On appelle noyau de f et on note $\text{Ker} f$ le sous-espace vectoriel de E , $f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- f est surjective si et seulement si $F = \text{Im} f$ si, et seulement si, $F \subset \text{Im} f$,
- f est injective si et seulement si $\text{Ker} f = \{0_E\}$ si, et seulement si, $\text{Ker} f \subset \{0_E\}$.

Remarque : La caractérisation de la surjectivité n'utilise pas la linéarité de f contrairement à la caractérisation de l'injectivité.

Théorème. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $f(\text{Vect} A) = \text{Vect}(f(A))$.

En particulier, si A est une partie génératrice alors $f(A)$ engendre l'image de f .

IV. Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- Si $(x_i)_{i \in I}$ est libre et si f est injective, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.
- Si $(x_i)_{i \in I}$ engendre E et si f est surjective, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ engendre F .
- Si $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E et si f est bijective, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

Si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im} f$

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- Si $(f(x_i))_{i \in I}$ engendre F , alors f est surjective.
- Si $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre, alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est surjective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ génératrice de E , la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ engendre F .
- f est injective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de E libre, la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.

- f est bijective si, et seulement si, pour toute base $(x_i)_{i \in I}$ de E , la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Théorème. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une base de E alors

- f est surjective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est génératrice de F ,
- f est injective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre,
- f est bijective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est une base de F ,

Proposition. Soit $(e_i)_{i \in I} \in E^I$ une base de E et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Alors

$$f = g \iff \forall i \in I, f(e_i) = g(e_i)$$

Remarque : Le résultat est conservé si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E .

Théorème. Soit $(e_i)_{i \in I} \in E^I$ une base de E et $(y_i)_{i \in I} \in F^I$ alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u(e_i) = y_i$.

On dit qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

V. Projections et symétries

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Tout élément x de E se décompose donc de façon unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe x_F .

Théorème. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G alors

- p est linéaire
- $\text{Imp} = \text{Ker}(p - \text{Id}) = F$
- $\text{Ker}p = G$
- $p \circ p = p$

Définition. On dit que p est une projection vectorielle de E s'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tel que p soit la projection sur F parallèlement à G

Théorème. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ alors p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.

Dans ce cas, p est la projection sur Imp parallèlement à $\text{Ker}p$.

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Tout élément x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $x_F - x_G$.

Théorème. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors

- s est linéaire et bijective
- $\text{Ker}(s - \text{Id}) = F$
- $\text{Ker}(s + \text{Id}) = G$
- $s \circ s = \text{Id}$

Définition. On dit que s est une symétrie vectorielle de E s'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tel que s soit symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Théorème. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}$.

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id})$

VI. Formes linéaires et hyperplans

Définition. On appelle hyperplan de E tout sev F de E admettant pour supplémentaire une droite vectorielle i.e. H est un hyperplan si, et seulement si,

$$\exists a \in E \setminus \{0\} : E = H \oplus \mathbb{K}a$$

Exemple. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles, les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.

Exemple. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$

Exemple. Soit a un réel, $\{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) : f(a) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dont un supplémentaire est l'ensemble des fonctions constantes de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition. Soit H un hyperplan. Si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Proposition. Si H et H' sont deux hyperplans de E tels que $H \subset H'$, alors $H = H'$.

Proposition. Si H est un hyperplan et F un sev de E tels que $H \subset F$, alors $F = H$ ou $F = E$.

Définition. On appelle forme linéaire sur E tout élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition. Si E possède une base $(e_1, \dots, e_n)$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et E sont isomorphes.

Théorème. Un sev de E est un hyperplan de E si, et seulement si, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition. Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors

$$\text{Ker}\phi = \text{Ker}\psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \phi = \lambda\psi$$

Exercice. Soient ϕ et ψ deux formes linéaires. Alors

$$\text{Ker}\phi \subset \text{Ker}\psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \psi = \lambda\phi$$