

Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

I. Variables aléatoires

Définition. On appelle variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E toute application de Ω dans E .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est réelle.

Remarque.

- Une variable aléatoire n'a rien d'aléatoire
- On peut définir la somme, $X + Y$, et le produit, XY , de deux variables aléatoires réelles X et Y .

Exemple. Toute application constante définie sur Ω est appelée variable aléatoire constante ou certaine.

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la variable aléatoire, $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est appelée variable aléatoire indicatrice de A .

Définition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E .

Pour toute partie A de E , $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \omega \in A\}$ est un événement qui est souvent noté plus simplement $(X \in A)$ ou « $X \in A$ ».

On notera $P(X \in A)$ sa probabilité plutôt que $P(X^{-1}(A))$ qui serait la notation rigoureuse.

Remarque. Si $A = \{a\}$, on notera $P(X = a)$ plutôt que $P(X^{-1}(\{a\}))$ qui serait la notation rigoureuse.

Si $A = [a, +\infty[\cap E$, on notera $P(X \leq a)$ plutôt que $P(X^{-1}(A))$ qui serait la notation rigoureuse. L'événement $(X \in A)$ est égal à l'événement $(X \in A) \cap X(\Omega)$. En pratique, on ne s'intéresse donc qu'aux événements $X \in A$ avec $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . L'application

$$P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1], A \mapsto P(X \in A)$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelé loi de probabilité de X ou, plus simplement, loi de X .

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . L'ensemble $X(\Omega)$ est fini.

P_X est donc entièrement déterminée par la donnée des probabilités

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) \text{ avec } x \in X(\Omega).$$

Plus précisément, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$

Se donner la loi de X revient donc à se donner des réels $(p_x)_{x \in X(\Omega)}$ positifs vérifiant :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1.$$

Remarque.

- Lorsque l'on demande de déterminer la loi d'une variable aléatoire X , il faut donner $X(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
- Lorsque l'on demande de vérifier que la loi donnée par l'énoncé est bien une loi, il faut vérifier que pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) \geq 0$ et que $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. L'application $f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω et sa loi est définie par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega), \quad P(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega) : f(x) = y} P(X = x)$$

II. Loïs usuelles

Définition. Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 < n_2$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ si $X(\Omega) = \llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ et si

$$\forall k \in \llbracket n_1, n_2 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket)$.

Définition. Soit $p \in [0, 1]$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si $P(X = 1) = p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

III. Variables aléatoires indépendantes

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs respectivement dans E et F . Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω .

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω .

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω indépendantes.

La loi de $X + Y$ est donnée par :

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : x + y = z} P(X = x)P(Y = y)$$

soit

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z - x)$$

ou

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)P(X = z - y)$$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω indépendantes.

La loi de $\text{Max}(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(\text{Max}(X, Y) \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z)$$

La loi de $\text{Min}(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(\text{Min}(X, Y) \geq z) = P(X \geq z)P(Y \geq z)$$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs respectivement dans E et F ; et f, g deux fonctions respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.

Définition. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur Ω sont dites indépendantes deux à deux si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Définition. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur Ω à valeurs respectivement dans $E_1, \dots, E_n$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$, on a :

$$P((X_1 \in A_1) \cap \dots \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Proposition. Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par $P(X = 1) = P(X = -1) = 1/2$. Montrer que les variables X, Y et XY sont indépendantes deux à deux mais pas mutuellement indépendantes.

Proposition. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_r)$ et $(X_{r+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_r)$ et $g(X_{r+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition. Soient $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Corollaire. Soient $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p), \dots, X_r \sim \mathcal{B}(n_r, p)$. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_r$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_r \sim \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_r, p)$.

Corollaire. Soient $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω mutuellement indépendantes.

La loi de $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(\text{Max}(X_1, \dots, X_n) \leq z) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq z)$$

La loi de $\text{Min}(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(\text{Min}(X_1, \dots, X_n) \geq z) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq z)$$

IV. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω . On appelle espérance de X le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Exemple. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = P(A)$.

Soit X la variable aléatoire constante à a , on a $\mathbb{E}(X) = a$.

Proposition. Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 \leq n_2$.

Si $X \sim \mathcal{U}([n_1, n_2])$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n_1 + n_2}{2}$.

Proposition. Soit $p \in [0, 1]$.

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Proposition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Proposition (Linéarité de l'espérance). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $X + Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et :

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$$

Définition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une variable aléatoire centrée. $X - \mathbb{E}(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à X .

Proposition (Positivité de l'espérance).

Soit X une variable aléatoire positive définie sur Ω , i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. On a :

- $\mathbb{E}(X) \geq 0$;
- $\mathbb{E}(X) = 0$ si, et seulement si, $P(X = 0) = 1$; on dit que X est presque certainement nulle.

Proposition (Croissance de l'espérance). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω telle que $X \geq Y$, i.e. $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. On a :

- $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$;
- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ si, et seulement si, $P(X = Y) = 1$; on dit que X et Y sont presque sûrement égales.

Proposition. (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** définie sur Ω . On a

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème. (de transfert)

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. On a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Théorème. Si les variables X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

V. Variance d'une variable aléatoire

Définition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $k \in \mathbb{N}$. On appelle moment d'ordre k de X le réel $\mathbb{E}(X^k)$ et moment centré d'ordre k , le réel $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.

Remarque. D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x) \text{ et } \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^k P(X = x)$$

Définition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On appelle variance de X , le moment centré d'ordre deux de X i.e.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x)$$

Proposition (Formule de Huygens). Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On a :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$;
- $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = m) = 1$; on dit que X est presque sûrement constante. Dans ce cas, $m = \mathbb{E}(X)$.

On appelle écart-type le réel $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque. La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion.

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Corollaire. Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 < n_2$.

Si $X \sim \mathcal{U}([n_1, n_2])$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{(n_2 - n_1 + 1)^2 - 1}{12}$.

Proposition. Soit $p \in [0, 1]$.

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Proposition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω . On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème. Si les variables X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

VI. Covariance de deux variables aléatoires

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires. On a :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$$

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle covariance de X et Y , le réel :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

de sorte que

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Définition. Deux variables aléatoires réelles X et Y sont dites non corrélées si $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Proposition. Deux variables aléatoires réelles indépendantes sont non corrélées mais il n'y a pas de réciproque.

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Prouver que $X + Y$ et $|X - Y|$ sont non corrélées mais non indépendantes.

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Proposition. Soient X, X', Y et Y' quatre variables aléatoires réelles définies sur Ω . On a :

- $\text{Cov}(X + \lambda X', Y) = \text{Cov}(X, Y) + \lambda \text{Cov}(X', Y)$;
- $\text{Cov}(X, Y + \lambda Y') = \text{Cov}(X, Y) + \lambda \text{Cov}(X, Y')$;
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;
- $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geq 0$;

Ainsi, $(X, Y) \mapsto \text{Cov}(X, Y)$ est bilinéaire, symétrique et positive.

Proposition. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles. On a :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Corollaire. Si on pose $C = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right) = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n) C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Théorème. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sigma_X \sigma_Y$$

avec égalité si, et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(aY + bX = c) = 1$.

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle facteur de corrélation le réel $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho_{X,Y} = 0$ mais il n'y a pas de réciproque.

On a $\rho_{X,Y} = \pm 1$ si, et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(aY + bX = c) = 1$.